МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ
ЄВРОПЕЙСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ

О.В. Скляренко, Г.М. Терещук

ПРАКТИКУМ
З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ
ЄВРОПЕЙСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ

О.В. Скляренко, Г.М. Терещук

ПРАКТИКУМ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

3-є видання, оновлене і доповнене

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів

Київ
Видавництво Європейського університету
2023

УДК – 51(072)
ББК 22.11
С 43

Рецензенти
В.В. Вітлінський – доктор економічних наук, професор
(ДВНЗ «Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана»),
М.Г. Медведєв – доктор технічних наук, професор
(ПВНЗ «Європейський університет),
В.Є. Березовський – кандидат фізико-математичних наук, доцент
(Уманський державний аграрний університет).

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(лист №14/18-Г-76 від 17.01.2007 р.)

СКЛЯРЕНКО О.В., ТЕРЕЩУК Г.М.

С 43 **Практикум з вищої математики для студентів економічних спеціальностей:** Навч. Посібник / О.В. Скляренко, Г.М. Терещук. – [3-є вид. оновл. і доп.] – К.: Вид-во Європ. ун-ту, 2023. – 155 с.

ISBN 978-966-301-125-7

Посібник містить навчально-тематичний план, структуру та програму вивчення дисципліни «Вища математика» за кредитно-трансферною системою організації навчального процесу, завдання для практичних занять, самостійної та індивідуальної роботи студентів, тематичні контрольні роботи та приклади їх розв'язання, в тому числі, із застосуванням комп'ютерних прикладних програм, зокрема, MathCad та EXCEL, переліки питань для самоперевірки і до заліку з даної дисципліни, розподіл балів при рейтинговій системі оцінювання.

Для студентів закладів вищої освіти.

УДК – 51(072)
ББК 22.11

ISBN 978-966-301-125-7

ПЕРЕДМОВА

Навчальна дисципліна «*Вища математика*» для студентів 1-го курсу розроблена у відповідності зі стандартами вищої освіти за спеціальностями 051 «Економіка», 071 «Облік і оподаткування», 072 «Фінанси, банківська справа та страхування», 073 «Менеджмент», 075 «Маркетинг», 076 «Підприємництво, торгівля та біржова діяльність».

Мета дисципліни. Головною метою викладання даної дисципліни – надати студентам фундаментальні знання з вищої математики, які дозволяють у подальшому засвоювати спеціальні дисципліни, що базуються на математичних поняттях. При цьому значна увага надається виробленню практичних навиків при розв'язуванні конкретних задач, вміння застосовувати математичні методи для дослідження реальних прикладних завдань та економічних процесів, прийняття оптимальних управлінських рішень в економіці, управлінні та бізнесі, в моделюванні та оптимізації організаційних процесів. Крім того, студентам надається можливість ознайомитися з безпосереднім використанням комп'ютерних програм при розв'язанні задач вищої математики.

Завдання дисципліни. Після освоєння дисципліни студенти повинні:

– уміти застосувати математичну теорію та математичні методи при математичному моделюванні процесів в складних системах, вирішенні оптимізаційних задач управління економічними системами та технологічними процесами;

– знати математичний апарат, що дозволяє ефективно вирішувати прикладні фінансові, економічні і управлінські задачі;

– уміти застосовувати математичний аналіз та математичні методи для дослідження реальних економічних процесів і прийняття оптимальних управлінських рішень;

– мати навички практичного рішення економіко-математичних задач з використанням сучасної обчислювальної техніки і проблемно-орієнтованих пакетів прикладних програм.

Місце дисципліни. Навчальна дисципліна «Вища математика» в підготовці бакалаврів за спеціальностями 051 «Економіка», 071 «Облік і оподаткування», 072 «Фінанси, банківська справа та страхування», 073 «Менеджмент», 075 «Маркетинг», 076 «Підприємництво, торгівля та біржова діяльність» є базовим курсом, що направлений на формування у студентів компетентностей застосування математичних методів для моделювання складних процесів та дослідження реальних економічних систем і прийняття оптимальних управлінських рішень.

НАВЧАЛЬНО-ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН ДИСЦИПЛІНИ «ВИЩА МАТЕМАТИКА»

№ з/п	Назва теми	Зміст тематичних понять
1.	Лінійна алгебра та аналітична геометрія	Вступ до курсу вищої математики Матриці, алгебра матриць Визначники та їх обчислення Обернена матриця, матричні рівняння Системи лінійних алгебраїчних рівнянь Векторна алгебра Основні поняття аналітичної геометрії на площині та у просторі
2.	Функції однієї та багатьох змінних	Числові послідовності Границі функції однієї змінної Похідна та її обчислення Похідні та диференціали вищих порядків Застосування похідної Застосування диференціального числення до дослідження функцій Функції кількох змінних та їх застосування
3.	Інтеграли	Невизначені інтеграли Визначені інтеграли та їх застосування Подвійні інтеграли та їх застосування
4.	Звичайні диференціальні рівняння	Диференціальні рівняння першого порядку Диференціальні рівняння другого порядку

СТРУКТУРА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

№ з/п	Зміст теми	Кількість годин			
		лекції	практ.	сам. роб.	всього
Тема 1. Лінійна алгебра та аналітична геометрія					
1	Вступ до курсу	2	2	3	7
2	Вектори та матриці	2	2	3	7
3	Системи лінійних алгебраїчних рівнянь	2	2	3	7
4	Аналітична геометрія на площині	2	2	3	7
5	Аналітична геометрія у просторі			2	4
Всього за темою		10	8	14	32
Форма тематичного контролю – контрольна робота					
Тема 2. Функції однієї і багатьох змінних					
6.	Математична логіка	2	2	2	6
7.	Числові множини. Дійсні числа	2	2	2	6
8.	Теорія границь	2	2	4	8
9.	Похідна та її обчислення	2	2	3	7
10.	Похідні та диференціали вищих порядків. Застосування похідної	2	2	5	9
11.	Функції кількох змінних та їх застосування	2	2	4	8
Всього за темою		12	12	20	44
Форма тематичного контролю – контрольна робота					
Тема 3. Інтеграли					
12	Невизначені інтеграли	2	2	6	10
13	Визначені інтеграли та їх застосування	2	2	6	10
14	Подвійні інтеграли та їх застосування	2		6	6
Всього за темою		6	4	16	26
Форма тематичного контролю – контрольна робота					
Тема 4. Звичайні диференціальні рівняння					
15	Диференціальні рівняння першого порядку	2	2	5	9
16	Диференціальні рівняння другого порядку	2	1	5	9
Всього за темою		4	4	10	18
Форма тематичного контролю – контрольна робота					
Всього за весь курс		32	28	60	120 (4 кредити EKTS)
Форма підсумкового контролю - залік					

ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ
«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

ТЕМА 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

1. Вступ

1. Основні поняття. Предмет дисципліни.
2. Роль математичної підготовки в формуванні сучасного спеціаліста у сфері економіки, менеджменту і бізнесу.
3. Значення математики в економічних дослідженнях.
4. Приклади економічних задач, які потребують застосування математичних методів розв'язання.

2. Вектори та матриці

1. Вектори та матриці.
2. Поняття векторного простору, вектора та матриці.
3. Дії над векторами та матрицями. Ранг матриці.
4. Мінори і алгебраїчні доповнення.
5. Визначники та їх властивості.
6. Дії над визначниками.

3. Системи лінійних рівнянь

1. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь.
2. Розв'язання систем лінійних рівнянь. Метод Жордана-Гауса.
3. Теорема Крамера. Теорема Лапласа.
4. Системи лінійних векторів. Ранг системи лінійних векторів. Лінійна залежність векторів. Базис векторного простору. Лінійні перетворення.
5. Застосування методів лінійної алгебри в економічних дослідженнях.

4. Аналітична геометрія на площині

1. Рівняння ліній на площині.
2. Різноманітні форми рівняння прямої на площині.

3. Кут між прямими. Відстань від точки до прямої.
4. Криві другого порядку: коло, еліпс, гіпербола, парабола, їхні геометричні властивості та рівняння.

5. Аналітична геометрія у просторі

1. Рівняння площини та прямої у просторі.
2. Кут між площинами. Кут між прямими. Кут між прямою та площиною.
3. Поверхні 2-го порядку. Геометричні властивості цих поверхонь, дослідження їхньої форми методом перетинів.

Рекомендована література: 1, 5, 7, 10.

ТЕМА 2. ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ТА БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

6. Математична логіка

1. Основні логічні операції та їх застосування.

7. Числові множини. Дійсні числа

1. Числові множини.
2. Дійсні числа.
3. Послідовність і її границя.
4. Поняття функціональної залежності. Властивості функцій. Основні види функцій.

8. Теорія границь

1. Числова послідовність. Обмежені та монотонні послідовності.
2. Границя послідовності. Нескінченно малі та нескінченно великі величини.
3. Неперервність функцій. Основні теореми про неперервні функції.
4. Класифікація точок розриву функцій.

9. Похідна та її обчислення

1. Поняття похідної. Похідні основних елементарних функцій.
2. Геометрична, механічна та економічна інтерпретація похідної.
3. Обчислення похідної.
4. Диференціал. Техніка диференціювання.

10. Похідні та диференціали вищих порядків. Застосування похідної

1. Похідні і диференціали вищих порядків.
2. Основні теореми диференційного числення. Правило Лопіталя.
3. Застосування похідної. Знаходження екстремуму функції.
4. Використання диференційного числення в економічних і управлінських задачах.
5. Дослідження функцій і побудова їх графіків.

   Функції однієї змінної в економічних задачах.

11. Функції кількох змінних та їх застосування

1. Поняття функції багатьох змінних.
2. Часткові похідні. Повний диференціал.
3. Екстремуми функції багатьох змінних.
4. Застосування функції багатьох змінних. Градієнт. Метод найменших квадратів. Застосування функцій багатьох змінних в економічних дослідженнях.

Рекомендована література: 5–11.

ТЕМА 3. ІНТЕГРАЛИ

12. Невизначені інтеграли

1. Поняття первісної та невизначеного інтегралу.
2. Властивості інтегралу.
3. Таблиця невизначених інтегралів.
4. Методи інтегрування.
5. Інтегрування деяких класів функцій.
6. Інтегрування раціональних функцій.
7. Інтегрування тригонометричних функцій.
8. Інтегрування ірраціональних функцій.
9. Застосування інтегралів в економічних задачах.

13. Визначені інтеграли та їх застосування

1. Задачі, що приводять до визначеного інтегралу.
2. Визначений інтеграл і його властивості.

3. Обчислення визначених інтегралів. Основна формула інтегрального числення.
4. Невласні інтеграли.
5. Інтеграли, які залежать від параметрів.
6. Застосування інтегрального числення в економічних і управлінських задачах.

14. Подвійні інтеграли та їх застосування

1. Подвійний інтеграл і його властивості.
2. Обчислення подвійних інтегралів.
3. Використання подвійних інтегралів для обчислення площ, плоских фігур та об'ємів тіл.
4. Застосування подвійних інтегралів для розв'язання економічних задач.

Рекомендована література: 5, 7–11.

ТЕМА 4. ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

15. Диференціальні рівняння першого порядку

1. Основні поняття. Поняття диференціальних рівнянь.
2. Задача Коші.
3. Види диференціальних рівнянь 1-го порядку.
4. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку.
5. Застосування диференціальних рівнянь.

16. Диференціальні рівняння другого порядку

1. Види рівнянь другого порядку.
2. Лінійні диференціальні рівняння 2-го порядку.
3. Застосування диференціальних рівнянь в економічних дослідженнях.
4. Динамічні системи в економічних задачах.

Рекомендована література: 7–11.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО ВИКОНАННЯ САМОСТІЙНИХ ТА ІНДИВІДУАЛЬНИХ РОБІТ

Самостійну роботу потрібно виконувати дотримуючись наступних правил:

1. Роботу виконують у рукописному або друкованому варіанті на листках формату А4 (у комп'ютерному варіанті – шрифт 14).
2. На обкладинці самостійної роботи повинні бути написані прізвище, ім'я, по батькові студента, номер академічної групи та номер по списку у журналі групи.
3. В кожному завданні необхідно вибрати свій варіант. Номер варіанта індивідуальної роботи – це ваш номер по списку у журналі академічної групи. В роботі повинні бути завдання тільки свого варіанту. Робота, яка містить завдання не свого варіанту, не перевіряється.
4. Перед розв'язанням завдання необхідно переписати повністю його умову. Якщо завдання має загальне формулювання, то при переписуванні його умови потрібно загальні дані замінити конкретними зі свого варіанту.
5. Розв'язання задач повинно супроводжуватися необхідними поясненнями та малюнками.
6. Після отримання перевіреної роботи студент повинен виправити усі помилки, які були відмічені викладачем.

ТЕМА 1
ЛІНІЙНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

1. Вступ

Практичне заняття

***Мета**: навчитися розв'язувати прості економічні задачі з використанням математичних понять таких, як функція однієї змінної, графіки основних елементарних функцій та їх властивості, знаходження відсотка від числа; пригадати як знаходиться область визначення функції, як досліджується функція на парність та непарність.*

Контрольні питання

1. Основні елементарні функції та їх графіки.
2. Знайдіть 15% від 75.
3. Скільки відсотків від числа 150 складає 45?
4. Що таке область визначення функції?
5. Яка функція називається парною?
6. Яка функція називається непарною?

Задачі для розв'язання

1. Підприємець вкладає 800 грн. на депозит в банк по ставці простого проценту із розрахунку 4% річних. Підрахуйте, яку суму інвестор буде мати на рахунку через два роки.
2. Продаж товару в залежності від дня місяця підкоряється закону $y = 2x^2 - x$. Побудувати графік функції та знайти кількість проданого товару за 7, 12 та 14 днів місяця.
3. Знайти область визначення функцій:

   а) $y = \dfrac{1}{1-x} + \sqrt{x^2 - 1}$;

   б) $y = \log_2(-x)$;

   в) $y = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$.

4. Дослідити на парність та непарність функції:

а) $y = x^4 - x$;

б) $y = t^2 - 1$;

в) $y = x^3 - 3x$.

Завдання для самостійної роботи

1. Вирахувати суму простого процентного доходу при вкладі на наступних умовах:

а) 10 000 грн. під 5% річних на 4 роки;

б) 6 000 грн. під 12% річних на 18 місяців;

в) 2 500 грн. під 8% річних на 6,5 років.

2. Продаж товару в залежності від дня місяця підкоряється закону $y = 5x^3 - x + 1$. Побудувати графік функції та знайти кількість проданого товару за 2, 5 та 10 днів місяця.
3. Знайти область визначення функцій:

а) $y = \dfrac{1}{1 - x^2} + \sqrt{x^2 - 16}$;

б) $y = \log_2(-x^2 + 1)$;

в) $y = \dfrac{1}{x^2 - 7x + 6}$.

4. Дослідити на парність та непарність функції:

а) $y = x^4 + x^2 + 3$;

б) $y = z^5 - 1$;

в) $y = x^7 + 3x^5 - x$.

2. Вектори та матриці

Завдання для самостійної роботи

1. Виконати дії над матрицями: $3A+2B$; $A\cdot C$, $A\cdot B$, $B\cdot A$, де

$$A=\begin{pmatrix}1&0&8\\2&1&0\\3&4&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&2&5\\0&3&6\\0&4&7\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}.$$

2. Обчислити визначники матриць:

$$A=\begin{pmatrix}2&-3\\5&6\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&0&8\\2&1&0\\3&4&0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2&1&3\\1&-2&1\\3&2&2\end{pmatrix}.$$

3. Виконати нарахування заробітної плати, що приходиться на кожне замовлення різних деталей, якщо відомі наступні дані:

а) кількість виробів (в штуках) у кожному замовленні

Замовлення	*Кількість виробів*		
	A	**B**	**C**
К	0	4	2
L	0	2	4
M	5	1	0

б) затрати робочої сили в годинах на кожному робочому місці та на кожний виріб

Виріб	*Затрати на робочому місці*				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
A	2	1	4	5	0
B	1	4	2	5	2
C	0	1	0	3	4

в) заробітна плата (в гривнях) за годину на кожному робочому місці

Робоче місце	*Погодинна заробітна плата*
1	1,25
2	1,50
3	1,40
4	1,40
5	1,25

3. Системи лінійних рівнянь

Практичне заняття

***Мета**: навчитися обчислювати обернену матрицю, засвоїти методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Крамера, матричним методом та методом Гауса.*

Контрольні питання

1. Які матриці називаються рівними?
2. Як виконується добуток матриці на число?
3. Що таке розмірність матриці?
4. Як додавати матриці однакової розмірності?
5. Чи комутативна сума двох матриць?
6. Які матриці називаються узгодженими?
7. Чи комутативний добуток матриць?
8. Дайте визначення оберненої матриці.
9. Як будується обернена матриця?
10. Розв'язати матричне рівняння $A \cdot X = B$.
11. Розв'язати матричне рівняння $X \cdot A = B$.
12. Розв'язати матричне рівняння $A \cdot X \cdot B = C$.
13. Яка матриця називається виродженою?
14. Наведіть формули Крамера.
15. У чому полягає суть метода Гауса?

Задачі для розв'язання

1. Знайти обернену до $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ матрицю.

2. Знайти обернену до $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ матрицю.

3. Розв'язати матричне рівняння $A \cdot X = B$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 9, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$$

а) методом Крамера;

б) матричним методом;

в) методом Гауса.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти обернену до $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ матрицю.

2. Знайти обернену до $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ матрицю.

3. Розв'язати матричне рівняння $X \cdot A = B$, де $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати систему лінійних рівнянь $AX = C$, де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

а) методом Крамера;

б) матричним методом;

в) методом Гауса.

5. З пункту А до пункту В необхідно перевезти обладнання трьох типів: I – 95 од., II – 100 од., III – 185 од. Для перевезення обладнання завод може замовити три види транспорту. Кількість обладнання кожного типу, що вміщується на певний вид транспорту, наведена у таблиці:

Тип обладнання	*Вид транспорту*		
	Т1	*Т2*	*Т3*
I	3	2	1
II	4	1	2
III	3	5	4

Записати у математичній формі умови перевезення обладнання з пункту А до пункту В. Встановити, скільки одиниць транспорту кожного виду потрібно для перевезення обладнання з пункту А до пункту В. Для розв'язання системи використати метод Гауса.

6. З двох заводів поставляються автомобілі для двох автопідприємств, потреби яких відповідно 200 і 300 автомобілів. Перший завод випустив 350 автомобілів, другий – 150. Відомі витрати на перевезення автомобілів із заводів до кожного автопідприємства, що задані у таблиці:

Завод	*Витрати на перевезення до автопідприємства, грош. од.*	
	1	2
I	15	20
II	8	25

Мінімальні витрати на перевезення становлять 7950 грош. од. Знайти оптимальний план перевезень автомобілів.

4. Аналітична геометрія на площині

Практичне заняття

***Мета**: вивчити види рівнянь прямої на площині; ознайомитися з кривими другого порядку: еліпсом, гіперболою, параболою; розглянути їх економічне застосування.*

Контрольні питання

1. Наведіть рівняння прямої в загальному вигляді.
2. Наведіть рівняння прямої, що проходить через дві задані точки.
3. Наведіть рівняння прямої із заданим кутовим коефіцієнтом.
4. Наведіть рівняння прямої у відрізках на осях координат.
5. Наведіть канонічне та параметричне рівняння прямої.
6. Наведіть умови паралельності та перпендикулярності прямих.
7. Дайте визначення еліпса.
8. Наведіть канонічне рівняння еліпса.

9. Як визначаються фокальні радіуси еліпса?
10. Наведіть властивості еліпса.
11. Що називається ексцентриситетом еліпса? Як він характеризує еліпс?
12. Що називається директрисами еліпса? Де вони розташовані?
13. Дайте визначення гіперболи.
14. Наведіть канонічне рівняння гіперболи.
15. Наведіть властивості гіперболи.
16. Які прямі називаються асимптотами гіперболи?
17. Що називається ексцентриситетом гіперболи? Як він характеризує гіперболу?
18. Що називається директрисами гіперболи? Де вони розташовані?
19. Дайте визначення параболи.
20. Наведіть канонічне рівняння параболи.
21. Наведіть властивості параболи.

Задачі для розв'язання

1. Дано рівняння еліпса $9x^2 + 25y^2 = 225$. Знайти ексцентриситет та рівняння директрис.
2. Скласти рівняння еліпса, якщо фокальна відстань дорівнює 8, а ексцентриситет дорівнює $1/2$.
3. Скласти рівняння еліпса, якщо $\varepsilon = \frac{1}{2}$, велика піввісь $a = 2$.
4. Скласти рівняння еліпса, якщо ексцентриситет дорівнює $\frac{1}{2}$, а відстань між директрисами дорівнює 32.
5. Скласти рівняння еліпса, якщо він проходить через точки $M_1\left(2; \sqrt{3}\right)$, $M_2(0; 2)$.
6. Скласти рівняння гіперболи, якщо $b = 4$, $c = 5$.
7. Скласти рівняння гіперболи, якщо $c = 3$, $\varepsilon = \frac{3}{2}$.

8. Написати канонічне рівняння гіперболи, у якої ексцентриситет дорівнює $\frac{3}{2}$, а відстань між директрисами дорівнює $\frac{8}{3}$.
9. Написати рівняння параболи, що проходить через точку $V(4;-8)$ симетрично осі $0X$, з вершиною у початку координат.
10. Скласти рівняння параболи з вершиною у початку координат, якщо фокус знаходиться в точці $F(0;-3)$.

Завдання для самостійної роботи

1. Скласти рівняння еліпса, якщо: 1) $\varepsilon = \frac{12}{13}$, $b = 5$; 2) $c = 3$, $\varepsilon = \frac{3}{5}$;

   3) $c = 2$, $\frac{2a}{\varepsilon} = 5$; 4) $a = 3$, $\varepsilon = \frac{1}{3}$.
2. Скласти рівняння гіперболи, якщо: 1) $a = 8$, $\varepsilon = \frac{5}{4}$; 2) гіпербола проходить через точки $M_1\left(3; \frac{2\sqrt{15}}{5}\right)$, $M_2\left(-2\sqrt{5}; 3\right)$.
3. Відстань між двома торговими організаціями становить 8 км. Знайти рівняння множини всіх можливих місць розташування баз, які обслуговують ці організації, якщо відомо, що сума відстаней від бази до них повинна бути постійною і дорівнювати 20 км.
4. Відстань між двома заводами, що виробляють однакову продукцію, дорівнює 400 км. Транспортні витрати на перевезення продукції від заводу А складають 2 грош. од. за 10 км, а від заводу В – 3 грош. од. за 10 км. Визначити межу районів, для яких однаково вигідно придбання продукції як на заводі А, так і на заводі В.
5. Два підприємства, що віддалені одне від одного на 100 км, виробляють деякі однакові вироби. Ціна реалізації одиниці товару для обох підприємств однакова і дорівнює *p*. Нехай транспортні витрати на перевезення одиниці товару від підприємства А до споживача складають 1 грош. од. на 1 км, а від підприємства В – 2 грош. д. на 1 км. Для яких споживачів витрати на

придбання одиниці товару в підприємствах А і В повинні бути однаковими? Як доцільніше прикріпити споживачів до підприємств?

6. Два однотипних підприємства А та В виробляють продукцію з однією і тією ж оптовою відпускною ціною m за один виріб. Однак, автопарк, що обслуговує підприємство А, оснащений новішими та потужнішими вантажними автомобілями. Тому транспортні витрати на перевезення одного виробу складають за 1 км: для підприємства А – 10 грош. од., для підприємства В – 20 грош. од. Відстань між підприємствами 300 км. Як територіально має бути поділений ринок збуту між двома підприємствами для того, щоб витрати споживача на відвантаження виробів та їх транспонування були мінімальними?

5. Аналітична геометрія у просторі

Завдання для самостійної роботи

1. Скласти рівняння площини, яка паралельна до осі OZ і проходить через точки $A(2;3;-1)$ і $B(-1;2;1)$.
2. Знайти відстань від точки $A(2;3;-1)$ до площини $7x-6y-6z+42=0$.
3. Які відрізки на координатних осях відтинає площина $2x+3y-5z+30=0$?
4. Через точку $M(2;3;-1)$ провести площину, паралельну площині $2x-3y+5z-4=0$.
5. Через точки $M(1;2;3)$ і $N(-2;-1;3)$ провести площину, перпендикулярну площині $x+4y-2z+5=0$.
6. Знайти кут між двома площинами $5x-3y+4z-4=0$ та $3x-4y-2z+5=0$.
7. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $A(1;2;-1)$, $B(-1;0;4)$, $C(-2;-1;1)$.
8. Знайти канонічне рівняння прямої, що задана загальним рівнянням

$$\begin{cases} x+3y-4z+5=0, \\ 2x-y+z-4=0. \end{cases}$$

9. Знайти кути, які пряма $\frac{x-5}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-4}{6}$ утворює з осями координат.

10. Знайти гострий кут між прямими

$$\begin{cases} 2x+3y-4z+5=0, \\ x-y+z=0; \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x-y+2z-4=0, \\ 2x+y-z-5=0. \end{cases}$$

11. Через точку $A(1;-1;2)$ провести пряму, яка паралельна прямій $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+1}{2}$.

12. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точки $A(1;2;-1)$ і $B(0;3;-4)$.

Приклади розв'язання задач до теми 1
«Лінійна алгебра та аналітична геометрія»

1. Виконати дії з матрицями

$$A=\begin{pmatrix}1&0&8\\2&1&0\\3&4&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&2&5\\0&3&6\\0&4&7\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$$

а) 3A+2B;

б) A·B; B·A;

в) A·C.

<u>Розв'язання.</u>

а) $$3A=\begin{pmatrix}3&0&24\\6&3&0\\9&12&0\end{pmatrix};\ 2B=\begin{pmatrix}2&4&10\\0&6&12\\0&8&14\end{pmatrix}.$$

$$3A+2B=\begin{pmatrix}3&0&24\\6&3&0\\9&12&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&4&10\\0&6&12\\0&8&14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&4&34\\6&9&12\\9&20&14\end{pmatrix}.$$

б) $$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&0&8\\2&1&0\\3&4&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&5\\0&3&6\\0&4&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0+0&2+0+32&5+0+56\\2+0+0&4+3+0&10+6+0\\3+0+0&6+12+0&15+24+0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&34&61\\2&7&16\\3&18&39\end{pmatrix};$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}1&2&5\\0&3&6\\0&4&7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&8\\2&1&0\\3&4&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+4+15&0+2+20&8+0+0\\0+6+18&0+3+24&0+0+0\\0+8+21&0+4+28&0+0+0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}20&22&8\\24&27&0\\29&32&0\end{pmatrix},$$

отже, $A\cdot B\neq B\cdot A$, тобто матриці A та B некомутативні.

в) $A \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0+16 \\ 0+1+0 \\ 0+4+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

2. Обчислити визначник матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Обчислимо визначник за допомогою алгебраїчних доповнень.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 8 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 - 0 + 40 = 40.$$

3. Знайти матрицю A^{-1}*, обернену до матриці* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Для знаходження оберненої матриці використаємо формулу:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\left(A^*\right)^T,$$

де A^* – приєднана до A матриця, складена з алгебраїчних доповнень елементів матриці A, символ «T» позначає операцію транспонування.

а) $$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 40 \neq 0,$$

отже, матриця А невироджена, тобто, вона має обернену.

б) Обчислимо алгебраїчні доповнення елементів матриці A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 8 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 32, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 8 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -8,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -24, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 16,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Тоді,

$$A^{*}=\begin{pmatrix}0&0&5\\32&-24&-4\\-8&16&1\end{pmatrix}.$$

Отже,

$$\left(A^{*}\right)^{T}=\begin{pmatrix}0&32&-8\\0&-24&16\\5&-4&1\end{pmatrix}.$$

в) Отримаємо обернену матрицю

$$A^{-1}=\frac{1}{40}\begin{pmatrix}0&32&-8\\0&-24&16\\5&-4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&4/5&-1/5\\0&-3/5&2/5\\1/8&-1/10&1/40\end{pmatrix}.$$

г) Впевнимося, що A^{-1} — обернена матриця до A. Якщо матриця A^{-1} знайдена вірно, то повинна виконуватись рівність $A^{-1}\cdot A=A\cdot A^{-1}=E$, де Е - одинична матриця.

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&8\\2&1&0\\3&4&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&4/5&-1/5\\0&-3/5&2/5\\1/8&-1/10&1/40\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}0+0+1&4/5+0-4/5&-1/5+0+1/5\\0+0+0&8/5-3/5-0&-2/5+2/5+0\\0+0+0&12/5-12/5-0&-3/5+8/5+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E.$$

Таким чином, матриця $A^{-1}=\begin{pmatrix}0&4/5&-1/5\\0&-3/5&2/5\\1/8&-1/10&1/40\end{pmatrix}$ є оберненою до матриці A.

4. Розв'язати матричне рівняння $A\cdot X=B$, де $A=\begin{pmatrix}1&0&8\\2&1&0\\3&4&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2&5\\0&3&6\\0&4&7\end{pmatrix}$.

Розв'язання. Помножимо обидві частини рівняння $A\cdot X=B$ на A^{-1} зліва, тобто

$$A^{-1}AX=A^{-1}B,\quad \text{або}\quad X=A^{-1}B.$$

Таким чином, для розв'язку задачі необхідно побудувати матрицю A^{-1}, обернену до матриці A.

З попередньої задачі маємо

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 4/5 & -1/5 \\ 0 & -3/5 & 2/5 \\ 1/8 & -1/10 & 1/40 \end{pmatrix}.$$

Тоді розв'язком матричного рівняння буде матриця

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & 4/5 & -1/5 \\ 0 & -3/5 & 2/5 \\ 1/8 & -1/10 & 1/40 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 12/5 - 4/5 & 24/5 - 7/5 \\ 0 & -9/5 + 8/5 & -18/5 + 14/5 \\ 1/8 & 2/8 - 3/10 + 1/10 & 5/8 - 6/10 + 7/40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8/5 & 17/5 \\ 0 & -1/5 & -4/5 \\ 1/8 & 1/20 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

5. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 9; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -2; \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$$

а) за методом Крамера;

б) за методом Гауса;

в) матричним методом .

<u>*Розв'язання.*</u>

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 13; \qquad \Delta \neq 0$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 9 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 1 \\ 7 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -13; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 26; \; \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & -2 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 39.$$

Тоді:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-13}{13} = -1;$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{26}{13} = 2;$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{39}{13} = 3.$$

б) Складемо розширену матрицю системи та приведемо її до трикутної за допомогою елементарних перетворень.

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 & 7 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 2 & 7 \end{array}\right).$$

Від другого рядка матриці віднімемо перший рядок помножений на 2, а від третього рядка віднімемо перший помножений на 3:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 1 & 13 \\ 0 & 8 & -1 & 13 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1/5 & 13/5 \\ 0 & 8 & -1 & 13 \end{array}\right).$$

Від третього рядка віднімемо другий помножений на 8:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1/5 & 13/5 \\ 0 & 0 & -13/5 & -39/5 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1/5 & 13/5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Відповідно запишемо систему:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -2 \\ \quad x_2 + \dfrac{1}{5}x_3 = \dfrac{13}{5} \\ \qquad x_3 = 3 \end{cases}.$$

З другого рівняння системи маємо

$$x_2 = \frac{13}{5} - \frac{1}{5}x_3 = \frac{13}{5} - \frac{1}{5}\cdot 3 = 2,$$

а з першого рівняння

$$x_1 = -2 + 2x_2 - x_3 = -2 + 4 - 3 = -1.$$

Отже, розв’язок системи x_1=-1;

x_2=2;

x_3=3.

в) Систему можна записати у матричному вигляді $A{\cdot}X{=}B$, де

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}, \qquad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Тоді (якщо $\det A \neq 0$) розв’язок системи знаходимо за формулою $X = A^{-1} \cdot B$.

Знайдемо матрицю A^{-1}, обернену до A.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 13, \quad \left(A^*\right)^T = \begin{pmatrix} -6 & 4 & 7 \\ 1 & -5 & 1 \\ 8 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -6 & 4 & 7 \\ 1 & -5 & 1 \\ 8 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$X = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -6 & 4 & 7 \\ 1 & -5 & 1 \\ 8 & -1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -54-8+49 \\ 9+10+7 \\ 72+2-35 \end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -13 \\ 26 \\ 39 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

таким чином, розв'язок системи: x_1=-1;

x_2=2;

x_3=3.

6. Вершини трикутника знаходяться в точках $A_1(2, 3)$, $A_2(5, 4)$, $A_3(9, 1)$.

Скласти:

а) рівняння прямої A_1A_2;

б) рівняння висоти та медіани цього трикутника, опущених з вершини A_2;

Розв'язання.

а) Рівняння прямої A_1A_2 запишемо як рівняння прямої, що проходить через дві задані точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1},$$

де $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, тобто

$\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{1}$ або $y = \frac{1}{3}x + 2\frac{1}{3}$ – рівняння прямої A_1A_2.

б) Запишемо рівняння прямої A_1A_3 як рівняння прямої, що проходить через дві задані точки:

$\frac{x-2}{7} = \frac{y-3}{-2}$ або $y = -\frac{2}{7}x + 3\frac{4}{7}$ – рівняння прямої A_1A_3.

Для знаходження рівняння висоти A_2D трикутника використаємо умову перпендикулярності прямих

$$k_1 = -\frac{1}{k_2},$$

де k_1 та k_2 – кутові коефіцієнти висоти A_2D та прямої A_1A_3 відповідно.

Оскільки кутовий коефіцієнт прямої A_1A_3 – $k_2 = -\frac{2}{7}$, то кутовий коефіцієнт висоти $k_1 = \frac{7}{2} = 3{,}5$.

Тепер можемо записати рівняння висоти A_2D як рівняння прямої з заданим кутовим коефіцієнтом:

$$y = k_1 x + b,$$

тобто $y = 3{,}5x + b$.

Оскільки точка A_2 належить висоті A_2D, її координати повинні задовольняти рівняння висоти, тобто

$4 = 3{,}5 \cdot 5 + b$ або $b = -13{,}5$.

Отже, рівняння висоти A_2D має вигляд

$$y = 3{,}5x - 13{,}5.$$

Для знаходження рівняння медіани A_2C знайдемо координати основи медіани – точки C, яка ділить відрізок A_1A_3 навпіл.

Координати середини відрізку знаходимо за формулами:

$$x_c = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y_c = \frac{y_1 + y_2}{2},$$

тобто координати точки C

$$x_c = \frac{11}{2} = 5{,}5, \quad y_c = 2,$$

або C(5,5; 2).

Запишемо рівняння медіани A_2C як прямої, що проходить через дві задані точки A_2 та C:

$\frac{x-5}{0{,}5} = \frac{y-4}{-2}$ або $y = -4x + 24$.

7. За допомогою векторної алгебри знайти:

а) довжину ребра A_1A_2, де $A_1(2, 4, 6)$, $A_2(5, 4 , 7)$;

б) кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_3, де $A_1(2, 4, 6)$, $A_2(5, 4 , 7)$, $A_3(-4, 8, 7)$.

Розв'язання.

а) Знайдемо координати вектора $\overline{A_1A_2}$:

$\overline{A_1A_2}(5-2,\ 4-4,\ 7-6)$, тобто $\overline{A_1A_2}(3,\ 0,\ 1)$.

Довжина ребра A_1A_2 дорівнює модулю вектора $\overline{A_1A_2}$.

Обчислимо його

$$\left|\overline{A_1A_2}\right| = \sqrt{3^2+0^2+1^2} = \sqrt{10}.$$

б) Косинус кута між векторами обчислюємо за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{\overline{A_1A_2}\cdot\overline{A_1A_3}}{\left|\overline{A_1A_2}\right|\cdot\left|\overline{A_1A_3}\right|}.$$

Щоб скористатися формулою обчислимо скалярний добуток векторів $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$. Для цього знайдемо координати цих векторів.

$\overline{A_1A_3}(-4-2,\ 8-4,\ 7-6) = \overline{A_1A_3}(-6,\ 4,\ 1)$.

З пункту 1 маємо $\overline{A_1A_2}(3,\ 0,\ 1)$.

Тоді $\overline{A_1A_2}\cdot\overline{A_1A_3} = 3\cdot(-6)+4\cdot 0+1\cdot 1 = -17$.

Знайдемо тема вектора $\overline{A_1A_3}$:

$$\left|\overline{A_1A_3}\right| = \sqrt{(-6)^2+4^2+1^2} = \sqrt{53}.$$

Обчислюємо кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_3:

$$\cos\varphi = \frac{-17}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{53}} = -\frac{17}{\sqrt{530}} \approx -0{,}74,$$

тобто кут дорівнює

$$\varphi = \arccos(-0{,}74) \approx 138^\circ.$$

ТЕМАТИЧНА КОНТРОЛЬНА РОБОТА №1
ЛІНІЙНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Завдання для тематичної контрольної роботи

Завдання І

Дані наведені в таблиці.

1. Виконати дії з матрицями: а) 3A+2B; б) A·B; B·A; в) A·C.

2. Обчислити визначник матриці A (detA).

3. Знайти обернену до A матрицю A^{-1}.

4. Розв'язати матричне рівняння AX=B.

5. Розв'язати систему рівнянь

а) методом Крамера,

б) методом Гауса,

в) матричним методом.

№ вар.	*A*	*B*	*C*	
1.	$\begin{pmatrix}1&0&2\\2&3&4\\1&0&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\\0&1&7\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}$	$\begin{array}{l}x_1+x_2+x_3=4\\x_1-2x_2+3x_3=2\\7x_1-8x_2+3x_3=2\end{array}$
2.	$\begin{pmatrix}2&3&4\\4&3&2\\1&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&7&8\\5&6&0\\0&1&6\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$	$\begin{array}{l}x_1-3x_2+x_3=1\\2x_1-x_2+3x_3=0\\5x_1-4x_2+x_3=2\end{array}$
3.	$\begin{pmatrix}5&4&3\\3&4&5\\1&0&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$	$\begin{array}{l}5x_1-7x_2=1\\x_1-2x_2+x_3=0\\4x_1-x_2+3x_3=5\end{array}$
4.	$\begin{pmatrix}1&2&4\\4&3&1\\1&2&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&2\\3&1&4\\1&4&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$	$\begin{array}{l}x_1-3x_3=2\\x_1+2x_2=4\\0{,}5x_1+2x_2+3x_3=7\end{array}$

5.	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$	$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$ $x_1 + x_2 - x_3 = 2$ $x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 0$
6.	$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$	$5x_1 - 3x_2 + x_3 = 2$ $x_1 - 8x_2 + 4x_3 = 11$ $3x_1 - 6x_2 = 2$
7.	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 1 & 11 & 7 \\ 7 & 5 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$	$x_1 - 2x_2 + x_3 = 4$ $2x_1 - x_2 + x_3 = 3$ $3x_1 - 4x_2 = 5$
8.	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$x_1 - x_2 + x_3 = 2$ $0{,}1x_1 - x_2 + 2x_3 = 3$ $2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0$
9.	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1$ $0{,}2x_1 - 4x_2 + x_3 = 2$ $5x_1 + 2x_3 = 1$
10.	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$	$x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1$ $0{,}1x_1 - 4x_2 + x_3 = 2$ $2x_1 + 3x_3 = 2{,}5$
11.	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$	$x_1 + x_2 + x_3 = 4$ $x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2$ $7x_1 - 8x_2 + 3x_3 = 2$
12.	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$	$x_1 - 3x_2 + x_3 = 1$ $2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$ $5x_1 - 4x_2 + x_3 = 2$
13.	$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$	$5x_1 - 7x_2 = 1$ $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$ $4x_1 - x_2 + 3x_3 = 5$
14.	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$	$x_1 - 3x_3 = 2$ $x_1 + 2x_2 = 4$ $0{,}5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7$

15.	$\begin{pmatrix}1&3&7\\2&1&0\\2&1&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&2\\3&1&4\\7&2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}$	$x_1+2x_2+3x_3=1$ $x_1+x_2-x_3=2$ $x_1+5x_2+5x_3=0$
16.	$\begin{pmatrix}5&3&1\\1&-3&-2\\-5&2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-8&3&0\\-5&9&0\\-2&15&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}$	$5x_1-3x_2+x_3=2$ $x_1-8x_2+4x_3=11$ $3x_1-6x_2=2$
17.	$\begin{pmatrix}3&-1&2\\4&-3&3\\-1&3&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3&9&7\\1&11&7\\7&5&7\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$	$x_1-2x_2+x_3=4$ $2x_1-x_2+x_3=3$ $3x_1-4x_2=5$
18.	$\begin{pmatrix}2&2&5\\3&1&0\\2&7&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&1&2\\1&0&1\\2&3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$	$x_1-x_2+x_3=2$ $0{,}1x_1-x_2+2x_3=3$ $2x_1-4x_2+3x_3=0$
19.	$\begin{pmatrix}2&0&1\\2&4&5\\1&2&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1&4\\0&2&5\\0&3&6\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$	$x_1-5x_2+3x_3=1$ $0{,}2x_1-4x_2+x_3=2$ $5x_1+2x_3=1$
20.	$\begin{pmatrix}4&2&3\\0&1&2\\1&2&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&3&4\\1&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$	$x_1-5x_2+3x_3=1$ $0{,}1x_1-4x_2+x_3=2$ $2x_1+3x_3=2{,}5$
21.	$\begin{pmatrix}4&0&2\\2&3&4\\1&0&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&2&3\\3&2&1\\0&1&7\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix}$	$x_1+x_2+x_3=4$ $x_1-2x_2+3x_3=2$ $7x_1-8x_2+3x_3=2$
22.	$\begin{pmatrix}1&3&4\\4&3&2\\1&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4&7&8\\5&6&0\\0&1&6\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix}$	$x_1-3x_2+x_3=1$ $2x_1-x_2+3x_3=0$ $5x_1-4x_2+x_3=2$
23.	$\begin{pmatrix}1&4&3\\3&4&5\\1&0&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3&1&1\\1&2&3\\1&4&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$	$5x_1-7x_2=1$ $x_1-2x_2+x_3=0$ $4x_1-x_2+3x_3=5$
24.	$\begin{pmatrix}0&2&4\\4&3&1\\1&2&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&1&2\\3&1&4\\1&4&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix}$	$x_1-3x_3=2$ $x_1+2x_2=4$ $0{,}5x_1+2x_2+3x_3=7$

25.	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$	$x_1+2x_2+3x_3=1$ $x_1+x_2-x_3=2$ $x_1+5x_2+5x_3=0$
26.	$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$	$5x_1-3x_2+x_3=2$ $x_1-8x_2+4x_3=11$ $3x_1-6x_2=2$
27.	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 7 \\ 1 & 11 & 7 \\ 7 & 5 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$	$x_1-2x_2+x_3=4$ $2x_1-x_2+x_3=3$ $3x_1-4x_2=5$
28.	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$	$x_1-x_2+x_3=2$ $0{,}1x_1-x_2+2x_3=3$ $2x_1-4x_2+3x_3=0$
29.	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$x_1-5x_2+3x_3=1$ $0{,}2x_1-4x_2+x_3=2$ $5x_1+2x_3=1$
30.	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$	$x_1-5x_2+3x_3=1$ $0{,}1x_1-4x_2+x_3=2$ $2x_1+3x_3=2{,}5$

Завдання II

За допомогою векторної алгебри знайти:

а) довжину ребра A_1A_2.;

б) кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_3..

1. $A_1(1, 1, 1)$; $A_2(7, 5, 6)$; $A_3(0, -5, 4)$.
2. $A_1(4, 2, 2)$; $A_2(3, 0, 1)$; $A_3(-1, 4, 2)$.
3. $A_1(3, -5, 2)$; $A_2(4, 5, 1)$; $A_3(-3, 0, 4)$.
4. $A_1(-2, 3, 5)$; $A_2(1, -3, 4)$; $A_3(7, 8, -1)$.
5. $A_1(2, 4, -6)$; $A_2(1, 3, 5)$; $A_3(0, 2, 0)$.
6. $A_1(4, 3, -1)$; $A_2(5, 0, 4)$; $A_3(2, 1, 2)$.

7.	$A_1(3, 4, -3)$;	$A_2(-5, 5, 0)$;	$A_3(2, 1, -4)$.
8.	$A_1(-2, 1, 7)$;	$A_2(3, -3, 18)$;	$A_3(5, 4, -1)$.
9.	$A_1(1, 0, 5)$;	$A_2(3, 2, 7)$;	$A_3(5, 0, 9)$.
10.	$A_1(2, 1, 0)$;	$A_2(4, 3, -3)$;	$A_3(-6, 5, 17)$.
11.	$A_1(0, 1, 1)$;	$A_2(7, 5, 6)$;	$A_3(0, -5, 4)$.
12.	$A_1(3, 2, 2)$;	$A_2(3, 0, 1)$;	$A_3(-1, 4, 2)$.
13.	$A_1(2, -5, 2)$;	$A_2(4, 5, 1)$;	$A_3(-3, 0, 4)$.
14.	$A_1(-1, 3, 5)$;	$A_2(1, -3, 4)$;	$A_3(7, 8, -1)$.
15.	$A_1(1, 4, -6)$;	$A_2(1, 3, 5)$;	$A_3(0, 2, 0)$.
16.	$A_1(3, 3, -1)$;	$A_2(5, 0, 4)$;	$A_3(2, 1, 2)$.
17.	$A_1(2, 4, -3)$;	$A_2(-5, 5, 0)$;	$A_3(2, 1, -4)$.
18.	$A_1(-1, 1, 7)$;	$A_2(3, -3, 18)$;	$A_3(5, 4, -1)$.
19.	$A_1(0, 0, 5)$;	$A_2(3, 2, 7)$;	$A_3(5, 0, 9)$.
20.	$A_1(1, 1, 0)$;	$A_2(4, 3, -3)$;	$A_3(-6, 5, 17)$.
21.	A1(0, 1, 1);	A2(7, 5, 6);	A3(0, -5, 4).
22.	A1(3, 2, 2);	A2(3, 0, 1);	A3(-1, 4, 2).
23.	A1(2, -5, 2);	A2(4, 5, 1);	A3(-3, 0, 4).
24.	A1(-3, 3, 5);	A2(1, -3, 4);	A3(7, 8, -1).
25.	A1(1, 4, -6);	A2(1, 3, 5);	A3(0, 2, 0).
26.	A1(3, 3, -1);	A2(5, 0, 4);	A3(2, 1, 2).
27.	A1(2, 4, -3);	A2(-5, 5, 0);	A3(2, 1, -4).
28.	A1(-0, 1, 7);	A2(3, -3, 18);	A3(5, 4, -1).
29.	A1(0, 0, 5);	A2(3, 2, 7);	A3(5, 0, 9).
30.	A1(1, 1, 0);	A2(4, 3, -3);	A3(-6, 5, 17).

Завдання III

Вершини трикутника знаходяться в точках $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$.

Скласти:

а) рівняння прямої A_1A_2;

б) рівняння висоти та медіани цього трикутника, опущеної з вершини A_2.

1. $A_1(1, 1)$; $A_2(5, 6)$; $A_3(2, 3)$.
2. $A_1(5, 2)$; $A_2(0, 1)$; $A_3(4, 3)$.
3. $A_1(-5, 2)$; $A_2(5, 1)$; $A_3(0, 4)$.
4. $A_1(3, 5)$; $A_2(-3, 4)$; $A_3(8, -1)$.
5. $A_1(4, -6)$; $A_2(3, 5)$; $A_3(2, 0)$.
6. $A_1(3, -1)$; $A_2(0, 4)$; $A_3(1, 2)$.
7. $A_1(4, -3)$; $A_2(5, 0)$; $A_3(1, -4)$.
8. $A_1(1, 7)$; $A_2(-3, 18)$; $A_3(4, -1)$.
9. $A_1(0, 5)$; $A_2(2, 7)$; $A_3(0, 9)$.
10. $A_1(2, 1)$; $A_2(4, 3)$; $A_3(-6, 5)$.
11. A1(2, 1); A2(5, 6); A3(2, 3).
12. A1(4, 2); A2(0, 1); A3(4, 3).
13. A1(-4, 2); A2(5, 1); A3(0, 4).
14. A1(2, 5); A2(-3, 4); A3(8, -1).
15. A1(3, -6); A2(3, 5); A3(2, 0).
16. A1(2, -1); A2(0, 4); A3(1, 2).
17. A1(3, -3); A2(5, 0); A3(1, -4).
18. A1(0, 7); A2(-3, 18); A3(4, -1).
19. A1(1, 5); A2(2, 7); A3(0, 9).
20. A1(1, 1); A2(4, 3); A3(-6, 5).
21. A1(2, 1); A2(5, 6); A3(2, 3).
22. A1(4, 2); A2(0, 1); A3(4, 3).

23.	A1(-4, 2);	A2(5, 1);	A3(0, 4).
24.	A1(2, 5);	A2(-3, 4);	A3(8, -1).
25.	A1(3 -6);	A2(3, 5);	A3(2, 0).
26.	A1(2, -1);	A2(0, 4);	A3(1, 2).
27.	A1(3, -3);	A2(5, 0);	A3(1, -4).
28.	A1(0, 7);	A2(-3, 18);	A3(4, -1).
29.	A1(1, 5);	A2(2, 7);	A3(0, 9).
30.	A1(1, 1);	A2(4, 3);	A3(-6, 5).

ТЕМА 2
ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ТА БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

6. Математична логіка

Завдання для самостійної роботи

1. Визначити, чи являються наступні формули тавтологіями?

   а) $(x_1 \wedge x_2) \to (x_3 \to x_2)$;

   б) $(x_1 \to x_2) \to ((x_2 \to x_3) \to (x_1 \to x_3))$;

   в) $(\overline{x}_1 \to x_2) \to (\overline{x}_2 \to x_1)$;

   г) $(x_2 \to x_3) \to (x_2 \to (x_1 \to x_3))$.

2. Чи еквівалентні формули?

   а) $A \equiv B\overline{A}\overline{B} \vee AB$ та $(A \vee \overline{B})(\overline{A} \vee B)$;

   б) $A \equiv (A \vee B)$ та $A \vee B$;

   в) $x_1 x_2 \vee \overline{x}_1 \overline{x}_3 \vee x_1 \overline{x}_3$ та $x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \vee (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_3)$;

   г) $\overline{x}_1 \overline{x}_2 x_3 \vee \overline{x}_1 \overline{x}_2 x_3 \vee x_1 \overline{x}_3$ та $\overline{x}_1$

3. Максимально спростити вираз, скориставшись законами логіки Буля.

   а) $(x_1 \wedge \overline{x}_3) \wedge (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2) \wedge (\overline{x}_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x}_1 \vee x_2) \wedge (x_2 \vee x_3)$;

   б) $(x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \overline{x}_2) \vee ((\overline{x}_1 \vee x_2) \wedge (x_3 \vee \overline{x}_4) \wedge (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2) \wedge (x_3 \vee x_4))$;

   в) $(x_1 \vee (x_3 \vee (x_2 \wedge x_3))) \wedge (\overline{x_3 \wedge x_4}) \wedge (x_3 \wedge \overline{x}_4) \wedge (x_3 \vee (\overline{x}_4 \wedge \overline{x}_3 \vee x_4))$;

   г) $(((x_4 \vee (x_4 \wedge x_3)) \wedge \overline{x}_4) \vee \overline{x}_2) \wedge ((x_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_1))$.

7. Числові множини. Дійсні числа

Практичне заняття

Мета: *навчитися виконувати дії над множинами; ознайомитися із поняттям границі послідовності.*

Контрольні питання

1. Сформулюйте означення числової множини.
2. Які є дії над множинами?
3. Яка множина називається універсальною?
4. Сформулюйте означення функції.
5. Які є види функцій?
6. Яка функція називається елементарною?
7. Що називається границею послідовності?

Задачі для розв'язання

1. Перечисліть всі елементи наступних множин:

   а) A = {x | x – буква слова "економічний"};

   б) B = {x | x – буква слова "менеджмент"};

   в) C = {x | x – парне ціле число, що менше 10, x > 0};

   г) D = {x | x – дільник числа 20};

   д) E = {x | x – корінь рівняння $x^2 - 4x + 5 = 0$}.

2. Виконайте дії для множин із завдання №1.

   а) $A \cup B \cup F$; $A \cap B \cap F$; $A|B$; $B|F$; $A \cup$;

   б) $D \cup E \cup C$; $D \cap C$; $D|C$; $C|D$; $A \cup E$;

   в) $Z \cup Y$; $Z|Y$; $Z \cap Y \cap C$; $Z \cap A$; $Z \cap \varnothing$;

   г) $Z \cup Z \cup Z \cup \varnothing$; $Z \cap Y \cap D$; $Z|Y$; $Z|D$; $Z \cup B$;

   д) $F \cup N \cup B$; $F \cap N \cap B$; $F|B$; $B|F$; $F \cap Y$.

3. Задано універсальну множину $\cup = \{a, b, c, d, e, m, n\}$ її підмножини

$A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{a, m\}$; $C = \{a, d, n\}$. Виконайте завдання:

а) $A \cup \left(\overline{B \cap C}\right)$; $\overline{A \cup B}$; $(A|B) \cup (B/C)$;

б) $(A/B) \cup (C/D)$; $\overline{A \cap B}$; $\overline{A}/\overline{B}$;

в) $(A/B)/(B/C)$; $\overline{A} \cup \overline{B}$; $\overline{A} \cap \overline{C}$;

г) $\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) \cap \overline{C}$; $\overline{A}/\overline{B}$; $A \cap B \cap C$;

д) $\left(\overline{A \cup B}\right)/\left(\overline{A \cap C}\right)$; $\overline{A}$; $\overline{B}$; $A \cap C$.

4. Доведіть тотожності, або спростіть вирази, будуючи діаграми Венна:

а) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

б) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$;

в) $\left(\overline{A} \cup B\right) \cap A = A \cap B$;

г) $A \cap \overline{B} \cup B$;

д) $(A \cap B \cap C) \cup \left(\overline{A} \cap B \cap C\right) \cup \overline{B} \cup \overline{C}$.

5. Знайти границю послідовності $y_1 = 0{,}3,\ y_2 = 0{,}33,\ y_3 = 0{,}333, \ldots$

6. Знайти границю послідовності $y_n = 2 + \dfrac{(-1)^n}{n}$.

7. Знайти границю послідовності $y_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

Завдання для самостійної роботи

1. Перечисліть всі елементи наступних множин:

а) F = {x | x – буква слова “інститут”};

б) M = {x | x – одна з цифр числа 130125};

в) N = {x | x – одна з букв слова “студент”};

г) Z = {x | x – непарне ціле число менше 11, x > 0};

д) Y = {x | x – дільник числа 15}.

2. Виконайте дії для множин із завдання №1.

а) $(D/E)\cup(E/D)$; E ∪ Ø; D ∩ Ø; $A\cup Y$;

б) $(A/B)\cap(B/A)$; $D\cup M$; $D|M$; D ∩ Ø;

в) $(A\cup B)/C$; $(A\cap B)/(B\cup A)$; $A\cup N$; A/Z;

г) $(A\cup N)/(A\cup F)$; $A\cap N$; $A\cap(M/N)$;

д) $A\cup A\cup A$; A/A; $(A\cap B)\cup C$; $A|B$; $B|A$.

3. Задано універсальну множину $\cup=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ та підмножини $A=\{1, 2, 4, 5\}$; $B=\{1, 2, 3, 6\}$; $C=\{3, 4, 7\}$. Виконайте завдання:

а) $A\cup\left(\overline{B\cap C}\right)$; $\overline{A\cup B}$; $(A|B)\cup(B/C)$;

б) $(A/B)\cup(C/D)$; $\overline{A\cap B}$; $\overline{A}/\overline{B}$;

в) $(A/B)/(B/C)$; $\overline{A}\cup\overline{B}$; $\overline{A}\cap\overline{C}$;

г) $\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)\cap\overline{C}$; $\overline{A}/\overline{B}$; $A\cap B\cap C$;

д) $\left(\overline{A\cup B}\right)/\left(\overline{A\cap C}\right)$; $\overline{A}$; $\overline{B}$; $A\cap C$.

4. Доведіть тотожності, або спростіть вирази, будуючи діаграми Венна:

а) $(A\cap B\cap C\cap X)\cup\left(\overline{X}\cap\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}\right)$;

б) $((A\cup B)\cap C)/(A\cap B\cup C)$;

в) $(A/B)\cup(B/C)\cup(C/A)$;

г) $(A/B)\cap(B/C)\cap(C/A)$;

д) $(((A/B)/C)/D)\cap(A\cup B)$.

5. Нехай A – множина коренів рівняння $x^2-3x+2=0$, $B=\{1,5\}$. Знайти $A\cup B$, $A\cap B$, $A-B$, $B-A$.

6. Знайти границю послідовності $y_n=\frac{1}{n}+\frac{(-1)^n}{n}$.

8. Теорія границь

Практичне заняття

***Мета**: опанувати методи знаходження границь функцій; навчитися розкривати невизначеності; ознайомитися із застосуванням чудових границь.*

Контрольні питання

1. Дайте визначення неперервності функції в точці.
2. Наведіть властивості неперервних функцій.
3. Дайте визначення границі функції.
4. Дайте визначення нескінченно малих та нескінченно великих функцій.
5. Наведіть властивості границь функцій.
6. Які границі називають першою та другою чудовими границями?

Задачі для розв'язання

1. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5x+2}{2x+3}$.

2. Знайти границі функцій, розкривши невизначеності типу $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$:

   1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+5}{2x+7}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x^2+2}{x^5-4x-8}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^6+2}{x^5-4x}$.

3. Знайти границі функцій, розкривши невизначеності типу $\left[\dfrac{0}{0}\right]$:

   1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$; 3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-5x+6}$.

4. Знайти границі функцій, позбувшись ірраціональностей:

   1) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{\sqrt[3]{x}-1}$.

5. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x}\right)$.

6. Обчислити границі функцій, застосовуючи першу чудову границю:

   1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin mx}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 7x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{x^2}$.

7. Обчислити границі функцій, застосовуючи другу чудову границю:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{x}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2x-4}{x^2+3x-2}\right)^{x}$.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти границі функцій:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-x+5}{x^3+3x^2+2x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{x^3+3x-5}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+x^3-x+1}{2x^3-1}$.

2. Знайти границі функцій:

1) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-2x-8}{x-4}$; 2) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+6x+8}{x^3+8}$; 3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}$.

3. Знайти границі функцій:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{\sqrt{x+3}-2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-5x+4}{\sqrt{x+3}-\sqrt{5-x}}$.

4. Обчислити границі функцій, застосовуючи першу чудову границю:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg5x}{\sin 4x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\cos x}{x}$.

5. Обчислити границі функцій, застосовуючи другу чудову границю:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-4}\right)^{3x-5}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-4}\right)^{5x-1}$.

9. Похідна та її обчислення

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти похідні функцій:

1) $y=x$; 2) $y=x^2$; 3) $y=x^3$; 4) $y=\sqrt{x}$; 5) $y=\sqrt[3]{x^2}$.

2. Знайти похідні функцій:

1) $y=5x^3$; 2) $y=-4x^2$; 3) $y=7\sqrt{x}$; 4) $y=\dfrac{8}{x^2}$; 5) $y=\dfrac{5}{\sqrt{x}}$.

3. Знайти похідні функцій, застосовуючи правила диференціювання:

1) $y=4x^3-3x^2+x-10$; 2) $y=\dfrac{1}{3}x+2\sqrt[3]{x}-4\sqrt{x}+\dfrac{3}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{5}$;

3) $y = x(1 - x^2)$; 4) $y = (x^2 - 3x + 5)(x + 10)$; 5) $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x - 3}$.

4. Знайти похідні тригонометричних функцій:

1) $y = \sin kx$; 2) $y = tgkx$; 3) $y = -\cos 2x$; 4) $y = \sin 3x^2$; 5) $y = \cos(3x)^2$;

6) $y = \sin\sqrt{x}$; 7) $y = \sqrt{\sin x}$; 8) $y = 3\sin^2 x$; 9) $y = \cos\sqrt{\dfrac{1}{1 + x}}$;

10) $y = tg\dfrac{1 + x}{x}$; 11) $y = x^3 \sin x + 3x^2 \cos x - 6xtgx - 6\cos 2x$; 12) $y = \dfrac{1}{\sin 2x}$; 13) $y = \dfrac{1 + \sin 3x}{\cos^3 x}$.

5. Знайти похідні обернених тригонометричних функцій:

1) $y = \arcsin 2x$; 2) $y = \arccos\left(\dfrac{1}{x}\right)$; 3) $y = arctg\sqrt{x}$;

4) $y = \sqrt{arctgx}$; 5) $y = \arcsin^3 x^2$; 6) $y = arctg\dfrac{1 - x}{1 + x}$.

6. Знайти похідні показникових та логарифмічних функцій:

1) $y = a^{3x}$; 2) $y = 2^{x^3}$; 3) $y = e^{-x}$; 4) $y = e^{x^4}$; 5) $y = 7^{\frac{1}{2x}}$; 6) $y = e^x(x^2 + 3x - 1)$;

7) $y = e^{\sqrt{\sin x}}$; 8) $y = \ln^5 x$; 9) $y = \ln\sin x$; 10) $y = x\ln x$.

7. Знайти похідні функцій:

1) $y = \sin^2 3x \cdot \cos^3 2x$; 2) $y = (e^{\cos x} + 3)^2$; 3) $y = (arctgx)^{\sin 2x}$;

4) $y = \arcsin\sqrt{x^2 - 1}$; 5) $y = x\arcsin\sqrt{x} + \log_3\sqrt{1 + x^2}$.

8. Знайти похідні функцій:

1) $y = \dfrac{\ln x}{x}$; 2) $y = \ln\dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$; 3) $y = arctg\dfrac{x}{a} + \ln\sqrt{\dfrac{x - a}{x + a}}$;

4) $y = 5^{\ln(x^2 + x + 1)}$; 5) $e^{\arcsin^2 x}$; 6) $y = arctg\dfrac{a + x}{1 - ax}$; 7) $y = arctg\dfrac{1}{\sqrt{x}}$;

8) $y = \sqrt{\dfrac{1}{\cos x}}$; 9) $y = \left(\dfrac{2}{27x} - \dfrac{1}{9x^2}\right)\sqrt{3x + x^2}$.

9. Нехай функція $K(x) = 20x - \frac{x^2}{20}$ встановлює залежність витрат виробництва від кількості x продукції, що випускається. Знайти граничні витрати виробництва і коефіцієнт еластичності, якщо обсяг продукції складає 100 од., 20 од.

10. Залежність між витратами виробництва y і обсягом продукції x, що випускається, виражається функцією $y = 50x - 0{,}05x^3$ (грош. од.). Визначити середні і граничні витрати, якщо обсяг продукції 10 од.

10. Похідні та диференціали вищих порядків. Застосування похідної

Практичне заняття

Мета*: засвоїти поняття диференціала функції, правил диференціювання; опанувати техніку обчислення похідних вищих порядків, навчитися застосовувати правило Лопіталя, опанувати техніку дослідження функцій однієї змінної; ознайомитися із дослідженням функцій в економіці.*

Контрольні питання

1. Дайте визначення похідної функції.
2. Який економічний зміст має похідна функції?
3. Які існують правила знаходження похідної функції?
4. Що таке приріст функції?
5. Дайте визначення диференціала функції.
6. Які ви знаєте правила диференціювання?
7. Наведіть формулу застосування диференціала функції до наближених обчислень?
8. Що таке абсолютна похибка?
9. Що таке відносна похибка?
10. У чому полягає правило Лопіталя?
11. Дайте визначення другої похідної, третьої похідної, похідної порядку n.
12. Сформулюйте необхідні та достатні умови зростання та спадання функції.
13. Які точки називаються точками екстремуму?

14. Які точки називаються критичними точками?
15. Сформулюйте достатні умови екстремуму.
16. Дайте визначення випуклого вниз (опуклого вгору) графіка функції.
17. Сформулюйте достатні умови опуклості графіка функції.
18. Дайте означення точки перегину.
19. Що називається похилою асимптотою графіка функції? Як знаходять похилі асимптоти?
20. Наведіть загальну схему дослідження функцій і побудови їх графіків.

Задачі для розв'язання

1. Знайти похідні складних функцій:

1) $y=\left(5x^2+7x+2\right)^3$; 2) $y=\sqrt{x^2+3}$; 3) $y=\sqrt{3x}$; 4) $y=\dfrac{2}{\left(3x^2-5\right)^3}$;

5) $y=x^2\left(5x-4\right)^6$; 6) $y=7x^2\sqrt{5+2x}$; 7) $y=\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right)^3$.

2. Знайти диференціали функцій:

1) $y=x$; 2) $y=x^2$; 3) $y=2x^3-x^2+3$; 4) $y=\ln\left(x^2+4\right)$.

3. Знайти похідну третього порядку функції $y=5x^4$.

4. Знайти похідну четвертого порядку функції $y=3x^4+5x^3-4x^2+8$.

5. Знайти похідну п'ятого порядку функції $y=\sin^2 x$.

6. Знайти похідні другого порядку функцій:

1) $y=x^2\arcsin x$; 2) $y=(x+1)e^{\sin x}$; 3) $y=x^{\ln x}$.

7. Обчислити границі функцій за правилом Лопіталя:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^3-2x^2+2x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^4-3x^2-4}$; 3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$;

4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x+\ln x}{1-\sqrt{2x-x^2}}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}x^2e^{\frac{1}{x}}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

8. Дослідити функцію $y=(x+1)(x-1)^3$ на екстремум.

9. Виробник реалізує свою продукцію за ціною p за одну одиницю. Витрати виробництва задаються залежністю $B(x) = ax + bx^3$, де x – об'єм продукції, a, b – деякі коефіцієнти, $a > 0$, $b > 0$. Знайти оптимальний для виробництва об'єм продукції та відповідний йому прибуток.
10. Дослідити на опуклість графік функції $y = (x+1)^3(x-1)$.
11. Дослідити функцію $y = 3x^3 - 9x^2 + 5x + 1$ та побудувати її графік.

Завдання для самостійної роботи

1. Написати рівняння дотичної до графіка функції $y = \sqrt[3]{x-1}$ у точці $x = 1$. Зробити схематичний малюнок.
2. Написати рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці $M(x_0, y_0)$:

1) $y = x^2 + 2x + 4, \quad x_0 = 1$; 2) $y = \sin x, \quad x_0 = 0$; 3) $y = \sqrt{x}, \quad x_0 = 1$.

3. Обчислити наближено:

   1) $arctg1{,}02$; 2) $tg46^0$; 3) $\sqrt[4]{90}$.

4. Обчислити наближено $\sqrt[3]{2}$. Оцінити точність результату.
5. Обчислити:

   1) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 7x + 10}{\ln(x^2 - 3)}$; 2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$; 3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$.

6. Дослідити на екстремум функції:

1) $y = (2x+1)(x-2)^{2/3}$; 2) $y = x^4 - 2$.

7. Дослідити на опуклість графік функції $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$.
8. Знайти асимптоти графіка функції $y = \dfrac{x^2 + 1}{x - 2}$.
9. Дослідити функцію $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$ та побудувати її графік.
10. Дослідити функцію $y = x^3 - 6x^2 - 36x + 41$ та побудувати її графік.
11. Обчислити наближено:

   1) $\ln 1{,}02$; 2) $\sqrt[3]{0{,}9}$.

12. Знайти приріст функції та її диференціал при $x = 10$ і $\Delta x = 0{,}1$, якщо $y = x^2 - x$. Обчислити абсолютну та відносну похибки, які одержуються при заміні приросту функції диференціалом.

13. Капітал в 1 млн. гривень може бути розміщеним у банку під 50% річних, або вкладеним у виробництво з ефективністю у 100%, витрати виробництва задаються квадратичною залежністю. Прибуток обкладається податком у b%. При якому значенні b вклад у виробництво є більш ефективним за чисте розміщення капіталу в банк?

14. Знайти асимптоти графіка функції $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$.

15. Розв'язати задачу вибору оптимального об'єму виробництва фірмою, функція прибутку якої може бути змодельована залежністю $y(x) = R(x) - C(x) = x^2 - 8x + 10.$

11. Функції кількох змінних та їх застосування

Практичне заняття

Мета*: засвоїти поняття функції багатьох змінних, опанувати техніку знаходження частинних похідних, засвоїти поняття повного диференціала функцій багатьох змінних та навчитися застосовувати диференціал до наближених обчислень, досліджувати екстремум функцій багатьох змінних*

Контрольні питання

1. Дайте визначення функції багатьох змінних.
2. Наведіть функцію Кобба-Дугласа.
3. Що таке лінія рівня функції двох змінних?
4. Яка функція двох змінних називається неперервною?
5. Що таке повний приріст функції двох змінних?
6. Що називається частинною похідною функції $z = f(x, y)$ по аргументу *x*?
7. Що називається частинною похідною функції $z = f(x, y)$ по аргументу *y*?
8. Що називається градієнтом функції $z = f(x, y)$

9. Дайте визначення повного диференціала функції $z = f(x, y)$.
10. Чим відрізняються поняття точки локального максимуму і точки глобального максимуму?
11. Яка точка називається критичною для функції $z = f(x, y)$?
12. Наведіть необхідні умови існування екстремуму функції $z = f(x, y)$.
13. Наведіть достатні умови екстремуму функції двох змінних.
14. Наведіть рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $z = f(x, y)$ у точці $M(x_0, y_0)$.

Задачі для розв'язання

1. Знайти область визначення функції $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.
2. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$ функцій:

   1) $z = x^2 - 3xy - 4y^2 - x + 2y + 1$; 2) Кобба-Дугласа: $z = a_0 x^{a1} y^{a2}$;

   3) $z = \sin(3x + 5y - 2xy - 1)$; 4) $z = e^{\frac{x}{y}}$; 5) $z = e^{x^2 + y^2}$; 6) $z = arctg\frac{y}{1 + x^2}$.
3. Знайти градієнт функції $z = \sqrt{xy}$ у точці (4; 1).
4. Знайти повний диференціал функцій:

   1) $z = x^y$; 2) $z = \ln(x^2 + y^2)$; 3) $z = arctg\frac{x + y}{x - y}$.
5. Обчислити наближено $arctg(1{,}02/0{,}95)$, виходячи зі значення функції $z = arctg(y/x)$ при $x = 1$, $y = 1$.
6. $z = y\ln x$. Знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.
7. $z = \sin x \sin y$. Знайти $d^2 z$.
8. Скласти рівняння дотичної площини та рівняння нормалі до поверхні $z = 1 + x^2 + y^2$ у точці $M(1; 1; 3)$.

9. Знайти екстремуми функцій

$$1)\ z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y; \qquad 2)\ z = x^3 + y^3 - 3xy.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$ функцій:

1) $z = \frac{x^2}{y^2} - \frac{x}{y}$; 2) $z = e^{xy\left(x^2+y^2\right)}$.

2. Знайти повний диференціал функції $z = \sin\left(x^2 + y^2\right)$.

3. Обчислити наближено $\sqrt[3]{1{,}02^2 + 0{,}05^2}$, виходячи зі значення функції $z = \sqrt[3]{x^2 + y^2}$ при $x = 1$, $y = 0$.

4. Знайти екстремуми функції $z = x^3 + y^3 - 15xy$.

5. Дана поверхня $z = \sin x \cos y$. Скласти рівняння дотичної площини та рівняння нормалі до поверхні у точці $M\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; \frac{1}{2}\right)$.

7. Для випуску деякого товару визначена виробнича функція

$f(x, y) = 20x + 10y - 2y^2 + 4x^2 + 3xy$,

де x, y - чинники виробництва. Визначити закон зміни виробничої функції $\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y}$.

8. Фірма виробляє два види товарів А і В та продає їх за ціною 1000 грош. од. і 800 грош. од. відповідно. Обсяги випуску товарів – *X* і *У*. Функція витрат має вигляд

$$C = 2X^2 + 2XY + Y^2.$$

Знайти такі значення *X* і *У*, за яких прибуток, отриманий фірмою, буде максимальним, і знайти цей прибуток.

9. Фірма реалізує частину товару на внутрішньому ринку, а іншу частину поставляє на експорт. Зв'язок ціни товару P_1 і його кількості Q_1, проданого на внутрішньому ринку, описується кривою попиту за рівнянням

$$P_1 + Q_1 = 500.$$

Аналогічно для експорту ціна P_2 і кількість Q_2 також зв'язані співвідношенням (рівняння кривої попиту)

$$2P_2 + 3Q_2 = 720.$$

Сумарні витрати визначаються виразом

$$C = 50000 + 20(Q_1 + Q_2).$$

Яку цінову політику повинна проводити фірма, щоб прибуток був максимальним?

Приклади розв'язання задач до теми 2

1. Знайти:

а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-2x-8}{x-4}$*;*

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4+8x}{x^4+3}$*;*

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-5x+4}{\sqrt{x+3}-\sqrt{5-x}}$*;*

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}5x}{\sin 4x}$*;*

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-4}\right)^{5x-1}$.

Розв'язання.

а) Границя чисельника та знаменника дорівнює нулю, тобто маємо невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$.

$$\lim_{x\to 4}(x-4)=\lim_{x\to 4}x-\lim_{x\to 4}4=4-4=0$$

$$\lim_{x\to 4}(x^2-2x-8)=\lim_{x\to 4}x^2-2\lim_{x\to 4}x-8=16-8-8=0$$

Отже, теорему про границю частки застосувати не можна. Але поблизу точки $x_0=4$ $(x\neq 4)$ $x-4\neq 0$, і тому дріб можна скоротити на $x-4$, тобто

$$\frac{x^2-2x-8}{x-4}=\frac{(x-4)(x+2)}{x-4}=x+2\,.$$

Останній вираз має зміст при всіх значеннях $x\neq 4$, тому

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-2x-8}{x-4}=\lim_{x\to 4}(x+2)\,.$$

У цьому випадку можна застосувати теорему про границю суми:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-2x-8}{x-4}=\lim_{x\to 4}(x+2)=\lim_{x\to 4}x+\lim_{x\to 4}2=4+2=6\,.$$

б) В цьому випадку ні чисельник, ні знаменник не мають границі, тому що обидва необмежено зростають $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Але якщо попередньо перетворити аналітичний вираз під знаком границі, розділивши чисельник і знаменник на x^4, то одержимо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^4+8x}{x^4+3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{7+\frac{8}{x^3}}{1+\frac{3}{x^4}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(7+\frac{8}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x^4}\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}7+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8}{x^3}}{\lim\limits_{x\to\infty}1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^4}}=\frac{7+0}{1+0}=7.$$

в) При безпосередній підстановці x=1 матимемо невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$. Це означає, що в чисельнику та знаменнику є множник (x–1), який їх перетворює в нуль.

Розділивши чисельник на (x–1) за правилом ділення многочленів, побачимо, що його можна записати у вигляді $x^3-5x+4=(x-1)(x^2+x-4)$. Щоб виділити множник (x–1) у знаменнику, множимо знаменник і чисельник на спряжений йому вираз:

$$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x-4)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{5-x}\right)}{\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{5-x}\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{5-x}\right)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x-4)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{5-x}\right)}{x+3-5+x}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x-4)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{5-x}\right)}{2(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{(x^2+x-4)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{5-x}\right)}{2}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to1}(x^2+x-4)\cdot\lim\limits_{x\to1}\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{5-x}\right)}{\lim\limits_{x\to1}2}=\frac{-2\cdot4}{2}=-4.$$

г) $$\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{tg}5x}{\sin4x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0}\frac{\sin5x}{\cos5x\cdot\sin4x}=\frac{5}{4}\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos5x}\lim_{x\to0}\frac{4x}{\sin4x}\lim_{x\to0}\frac{\sin5x}{5x}=\frac{5}{4}\cdot1\cdot1\cdot1=\frac{5}{4},$$

оскільки кожний із двох останніх співмножників є границя типу $\lim\limits_{n\to0}\frac{\sin n}{n}$ яка дорівнює одиниці.

д) Границя виразу, який стоїть у дужках

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+2}{3x-4}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{2}{x}}{3-\frac{4}{x}}=1$$

Показник степені прямує до нескінченності, тобто маємо невизначеність $[1^\infty]$, тому потрібно застосувати другу особливу границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$. Для цього перетворимо вираз:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4+4+2}{3x-4}\right)^{5x-1} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{6}{3x-4}\right)^{5x-1} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{6}{3x-4}\right)^{\frac{3x-4}{6}}\right]^{\frac{6}{3x-4}(5x-1)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{30x-6}{3x-4}} = e^{10}.$$

2. Знайти похідну функцій:

а) $y = (\ln x + 1)^3$*;*

б) $y = \sqrt{x^2+4x} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2-3}}$*;*

в) $y = \ln\dfrac{e^{2x}+x}{\cos 5x}$*;*

г) $y = x \cdot \arccos\dfrac{x}{4} - \sqrt{16-x^2}$.

<u>Розв’язання.</u>

а) Покладемо $y = u^3$, де $u = 1 + \ln x$. Тоді за правилом диференціювання складної функції:

$$y' = 3\cdot u^2 \cdot u' = 3(1+\ln x)^2 \cdot (1+\ln x)' = 3(1+\ln x)^2\,\frac{1}{x}.$$

б) Запишемо функцію у вигляді

$$y = (x^2+4x)^{\frac{1}{2}} + (x^2-3)^{-\frac{1}{2}}.$$

Позначимо $u = x^2 + 4x$, $v = x^2 - 3$, тоді $y = u^{\frac{1}{2}} + v^{-\frac{1}{2}}$.

Маємо

$$y' = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\cdot u' - \frac{1}{2}v^{-\frac{3}{2}}\cdot v' = \frac{1}{2}(x^2+4x)^{-\frac{1}{2}}(2x+4) - \frac{1}{2}(x^2-3)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x =$$

$$= \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}} + \frac{x}{\sqrt{\left(x^2-3\right)^3}}.$$

в) Запишемо функцію у вигляді $y = \ln\left(e^{2x} + x\right) - \ln\cos 5x$.

Маємо

$$y' = \frac{\left(e^{2x} + x\right)'}{e^{2x} + x} - \frac{(\cos 5x)'}{\cos 5x} = \frac{2e^{2x} + 1}{e^{2x} + x} + \frac{5\sin 5x}{\cos 5x} = \frac{2e^{2x} + 1}{e^{2x} + x} + 5\mathrm{tg}5x .$$

г) Маємо $y' = x' \cdot \arccos\frac{x}{4} + x\left(\arccos\frac{x}{4}\right)' - \frac{1}{2\sqrt{16 - x^2}} \cdot (16 - x^2)' =$

$$= \arccos\frac{x}{4} - \frac{x}{\sqrt{1 - \frac{x^4}{16}}} \cdot \left(\frac{x}{4}\right)' - \frac{1}{2\sqrt{16 - x^2}} \cdot (-2x) =$$

$$= \arccos\frac{x}{4} - \frac{x}{\sqrt{16 - x^4}} + \frac{x}{\sqrt{16 - x^2}} = \arccos\frac{x}{4} .$$

3. Дослідити функцію $y = x^3 - 6x^2 - 36x + 41$ *та побудувати її графік.*

Розв’язання.

а) Область визначення функції $D(y) = (-\infty; +\infty)$, тобто функція існує при всіх значеннях.

б) Парність, періодичність:

$$y(-x) = -x^3 - 6x^2 + 36x + 41, \qquad y(-x) \neq \pm y(x) .$$

Функція загального виду, ні парна, ні непарна, неперіодична.

в) Точки перетину з осями координат:

– з віссю *OX*: $y = 0 \;\Rightarrow\; x^3 - 6x^2 - 36x + 41 = 0$.

Легко перевірити, що x_1=1 є корінь рівняння, тому

$$x^3 - 6x^2 - 36x + 41 = (x-1)(x^2 - 5x - 41) .$$

Знайдемо дві інші точки перетину графіка з віссю *OX*:

$$x^2 - 5x - 41 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = \frac{5 + \sqrt{189}}{2} \approx 9{,}37 ;$$

$$x_2 = \frac{5 - \sqrt{189}}{2} \approx -4{,}37 .$$

Точки перетину графіка з віссю *OX* — *A*(1; 0), *B*(-4,37; 0), *C*(9,37; 0);
точка перетину графіка з віссю *OY* (*x*=0) — D(0; 41).

г) Інтервали зростання та спадання функції, точки екстремуму:

$$y' = 3x^2 - 12x - 36; \quad y' = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4x - 12 = 0.$$

Тоді $x_1=6$, $x_2=-2$ – критичні точки.

Здобуті дані заносимо до таблиці.

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 6)$	6	$(6; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	$\nearrow$ (зростає)	81	$\searrow$ (спадає)	-175	$\nearrow$ (зростає)

Точка максимуму функції $M(-2; 81)$, точка мінімуму $N(6; -175)$.

д) Точка перегину, інтервали опуклості та вгнутості:

$y'' = 6x - 12$, $y'' = 0$, $6x - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$ — критична точка другого роду.

Дані заносимо до таблиці

x	$(-\infty; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$f'(x)$	–	0	+
$f(x)$	$\cap$ (опукла)	-47	$\cup$ (вгнута)

Точка перегину $E(2; -47)$.

е) Асимптоти:

Вертикальної асимптоти немає, оскільки функція є неперервною.

Дослідимо на горизонтальну асимптоту.

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = \lim_{x\to\infty}(x^3 - 6x^2 + 36x + 41) = \infty.$$

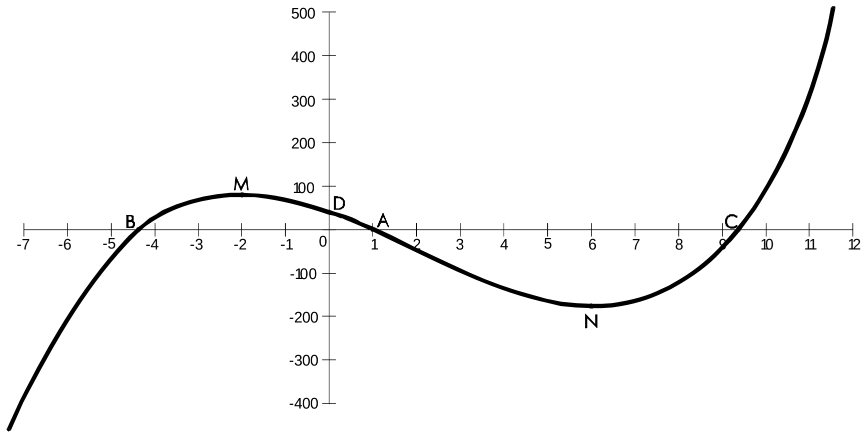
Отже, горизонтальної асимптоти немає.

Похила асимптота має вигляд $y = kx + b$, де $k = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y(x)}{x}$, а $b = \lim\limits_{x\to\infty}(y(x) - kx)$.

В нашому випадку $k = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3 - 6x^2 + 36x + 41}{x} = \infty$. Похилої асимптоти немає.

Отже, функція не має асимптот.

Використовуючи здобуті дані, будуємо графік функції.



ТЕМАТИЧНА КОНТРОЛЬНА РОБОТА №2
ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ТА БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Завдання для тематичної контрольної роботи

Завдання І

Знайти границі функцій:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5-4x+3x^4}{7-2x^2-2x^4}$; $\quad\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x^2-4x-6}{2x^2-5x-3}$.

2. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}$; $\quad\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x}{tg5x}$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-4}{3n+2}\right)^{2n-4}$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+6x-5}{7-4x^3}$; $\quad\lim\limits_{x\to2}\dfrac{5x^2-6x-8}{x^3-8}$.

5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{\sqrt{x^2+25}-5}$; $\quad\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin 2x}$.

6. $\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{3x/(x-1)}$.

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-6x+1}{x^3-4x}$; $\quad\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-4x+3}{2x^2-5x+3}$.

8. $\lim\limits_{x\to9}\dfrac{\sqrt{2x+7}-5}{\sqrt{x+7}-4}$; $\quad\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 3x-1}{x\mathrm{tg}x}$.

9. $\lim\limits_{x\to\infty}(x+3)\bigl(\ln(2x-3)-\ln(2x+1)\bigr)$.

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^4+1}+x}{2x^2-4x}$; $\quad\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-4x}{3x^2-5x-2}$.

11. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{2x+7}-3}{\sqrt{4+x}-\sqrt{6-x}}$; $\quad\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{x-\sin 3x}$.

12. $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin 2x)^{1/3x}$.

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+6x-4}{\sqrt{16x^4+1}+x}$; $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2+7x-60}{x^3-25x}$.

14. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{3x+1}-4}{\sqrt{7x+1}-5}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin 3x}$.

15. $\lim\limits_{x\to 2}(3-x)^{5x/(x-2)}$.

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-7x^2+5}{4x-5x^4}$; $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2-4x-12}{2x^2-5x-42}$.

17. $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{6x}-6}{\sqrt{x+1}-\sqrt{13-x}}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg5x}{\sin 4x}$.

18. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-6}{5x+4}\right)^{2x-3}$.

19. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-7x+49}{3x^5-4x+1}$; $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-14x+49}{x^2-x-42}$.

20. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{7x}-7}{\sqrt{2x+2}-4}$; $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{tg}2x\mathrm{ctg}5x$.

21. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1+3x}{2x}}$.

22. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3-4x+1}}{5x-4}$; $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{3x^2-20x-32}{x^2-64}$.

23. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{5x-1}-3}{\sqrt{8x}-4}$; $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{ctg}^2 5x\cdot\sin^2 2x$.

24. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2x-4}{2x-5}\right)^{\frac{1}{3x}}$.

25. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4+5x^2}{5-4x^4}$; $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x^2-81}{2x^2-5x+9}$.

26. $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{9x}-9}{x^2-10x-9}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{3x(x^2+1)}$.

27. $\lim\limits_{x\to 1}(3x-2)^{4x/(x^2-1)}$.

28. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4+3x^2-6}{\sqrt{x^3+4}}$; $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{3x^2-5x-2}$.

29. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{5x-1}}{x^2-x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\sin 2x\cdot\mathrm{ctg}^2 3x$.

30. $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{1/x-2}$.

Завдання ІІ

Знайти похідні функцій

1. $y=\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[4]{1+\sqrt[3]{x}}$.

2. $y=\dfrac{\sin 4x+1}{\mathrm{tg}3x}$.

3. $y=\ln\dfrac{e^{2x}+\sqrt{x}}{\cos 3x}$.

4. $y=\mathrm{arctg}\dfrac{\cos x}{\sin x}$.

5. $y=\sqrt[4]{\dfrac{1+x^2}{1+\sqrt[3]{x}}}$.

6. $y=\dfrac{tg2x+4}{\sin 5x}$.

7. $y=\ln\dfrac{e^{3x}+2^x}{\sin 4x}$.

8. $y=\arcsin\dfrac{2\cos x}{\sqrt{5}}$.

9. $y=\sqrt{x^3+4x}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+3}}$.

10. $y=\dfrac{\mathrm{tg}4x+8x}{\cos 9x}$.

11. $y=\ln\dfrac{\sqrt{1+\sin^2 x}+\sqrt{2}\sin x}{1+\sin^2 x-\sqrt{2}\sin x}$.

12. $y=\mathrm{arctg}\dfrac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$.

13. $y = x\sqrt[3]{x^5 + 5x^4 - \dfrac{7}{x}}$.

14. $y = \dfrac{\cos 8x + e^{2x}}{\mathrm{ctg} 4x}$.

15. $y = \ln\left(\sin x + \sqrt{\sin^2 x - 1}\right)$.

16. $y = \arcsin x \dfrac{1}{2\sin x}$.

17. $y = \sqrt[3]{x^2 + 4x} - \dfrac{1}{x^2 + 1}$.

18. $y = \dfrac{\sin 4x + 2^x}{\lg(4x)}$.

19. $y = xtgx + \ln\cos x$.

20. $y = x\arcsin\dfrac{x}{2} + \sqrt{4 - x^2}$.

21. $y = \dfrac{1}{x + \sqrt{x^2 + 5}}$.

22. $y = \dfrac{\sin 9x + \mathrm{tg} 2x}{\cos 3x}$.

23. $y = -\dfrac{x}{\sin x} + \ln \mathrm{tg}\dfrac{x}{2}$.

24. $y = x\arccos\dfrac{x}{3} + \sqrt{9 - x^2}$.

25 . $y = x \ \ + \sqrt[6]{\dfrac{1 + x^6}{1 - x^6}}$.

26. $y = \dfrac{\sin 5x + 4^x}{tg 3x}$.

27. $y = x\ln(x^2 - 4) - 2x + 2\ln\dfrac{x+2}{x-2}$.

28. $y = x\arcsin\dfrac{2}{x} + 2\ln(x + \sqrt{x^2 - 9})$.

29. $y = x^2 + \sqrt[5]{\dfrac{1 + x^2}{1 - 5x^3}}$.

30. $y = \sqrt[3]{\dfrac{1 - \sin 2x}{\cos 3x}}$.

Завдання III

Дослідити методами диференціального числення функцію і побудувати її графік.

1. $y = 3x^3 - 9x^2 + 5x + 1$.
2. $y = x^3 - 6x^2 - 15x + 20$.
3. $y = x^3 - \frac{15}{2}x^2 - 12x + \frac{37}{2}$.
4. $y = x^3 - 24x^2 + 23$.
5. $y = x^3 + 3x^2 - 9x - 2$.
6. $y = x^3 + 6x^2 + 9x - 50$.
7. $y = x^3 + 9x^2 + 15x + 2$.
8. $y = x^3 - 12x - 9$.
9. $y = x^3 - 9x^2 - 21x + 164$.
10. $y = x^3 + 9x^2 - 48x - 56$.
11. $y = x^3 - 9x^2 + 5x + 1$.
12. $y = 2x^3 - 6x^2 - 15x + 20$.
13. $y = 2x^3 - \frac{15}{2}x^2 - 12x + \frac{37}{2}$.
14. $y = 2x^3 - 24x^2 + 23$.
15. $y = 2x^3 + 3x^2 - 9x - 2$.
16. $y = 2x^3 + 6x^2 + 9x - 50$.
17. $y = 2x^3 + 9x^2 + 15x + 2$.
18. $y = 2x^3 - 12x - 9$.
19. $y = 2x^3 - 9x^2 - 21x + 164$.
20. $y = 2x^3 + 9x^2 - 48x - 56$
21. $y = x^3 - 9x^2 + 5x + 1$.
22. $y = 3x^3 - 6x^2 - 15x + 20$.

23. $y = 3x^3 - \frac{15}{2}x^2 - 12x + \frac{37}{2}$.

24. $y = 3x^3 - 24x^2 + 23$.

25. $y = 3x^3 + 3x^2 - 9x - 2$.

26. $y = 3x^3 + 6x^2 + 9x - 50$.

27. $y = 3x^3 + 9x^2 + 15x + 2$.

28. $y = 3x^3 - 12x - 9$.

29. $y = 3x^3 - 9x^2 - 21x + 164$.

30. $y = 3x^3 + 9x^2 - 48x - 56$

ТЕМА 3
ІНТЕГРАЛИ

12. Невизначені інтеграли

Практичне заняття

Мета: *засвоїти поняття первісної та невизначеного інтеграла, опанувати техніку обчислення інтегралів за допомогою таблиці та методом заміни змінної, набути навиків підбору підстановок та підведення функції під знак диференціала, засвоїти формулу інтегрування частинами, набути навиків виділяти під інтегралом множники u та dv, опанувати техніку обчислення інтегралів від раціональних функцій.*

Контрольні питання

1. Що таке первісна функції, які її властивості?
2. Сформулюйте достатні умови існування первісної.
3. Дайте означення невизначеного інтеграла. Які його властивості?
4. Наведіть теорему про заміну змінної у невизначеному інтегралі.
5. Скільки первісних має функція $f(x)$ на проміжку і чим вони відрізняються одна від одної? Навести приклад двох різних первісних для функції x^2.
6. Чи завжди первісна функція є елементарною? Наведіть приклад функції, інтеграли від яких не є елементарними функціями.
7. Наведіть формулу інтегрування частинами у невизначеному інтегралі.
8. Яким умовам повинні задовольняти функції $u(x)$ та $v(x)$ у формулі інтегрування частинами?
9. Яка функція називається раціональною?
10. Дайте означення цілої та дробової раціональних функцій, правильного та неправильного раціонального дробу.
11. Які дроби називаються елементарними?
12. Сформулюйте теорему про розклад многочлена з дійсними коефіцієнтами на множники.

13. Сформулюйте теорему про розклад правильного раціонального дробу на елементарні.

Задачі для розв'язання

1. Обчислити інтеграли: 1) $\int xdx$; 2) $\int x^2dx$; 3) $\int x^5dx$; 4) $\int dx$; 5) $\int\sqrt{x}dx$; 6) $\int\sqrt[3]{x^2}dx$; 7) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}}$ і перевірити диференціюванням одержаний результат.

2. Обчислити інтеграли: 1) $\int\frac{dx}{x^2-4}$; 2) $\int\frac{dx}{4x^2+25}$; 3) $\int\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$; 4) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$.

3. Знайти первісну для функції $f(x)=\sin x$, яка в точці $x=\frac{\pi}{2}$ приймає значення рівне 6.

4. Обчислити інтеграли: 1) $\int 7x^5dx$; 2) $\int 3\sqrt[4]{x^3}dx$; 3) $\int\frac{6}{x^2}dx$; 4) $\int 5dx$.

5. Обчислити інтеграли: 1) $\int\left(x^3-3x^2+5x-4\right)dx$; 2) $\int\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{x^3}-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx$; 3) $\int\left(3x^2-1\right)^2dx$; 4) $\int\frac{x^4}{1+x^2}dx$.

6. Обчислити інтеграли: 1) $\int\frac{xdx}{x^2+2}$; 2) $\int\frac{x^2}{x^3-3}dx$; 3) $\int\sin 2xdx$; 4) $\int\cos(3x+5)dx$; 5) $\int e^{2x-1}dx$; 6) $\int\frac{dx}{4x-1}$; 7) $\int 2^{3x-4}dx$; 8) $\int\frac{xdx}{4+x^2}$; 9) $\int\frac{dx}{x(1+\ln x)}$.

7. За допомогою формули інтегрування частинами обчислити інтеграли:
   1) $\int x\sin 2xdx$; 2) $\int x^2e^xdx$; 3) $\int\sqrt{x}\ln xdx$; 4) $\int arctgxdx$.

8. Розкласти на елементарні дроби:
   1) $\frac{11x+40}{4(x-4)(x+2)}$; 2) $\frac{x+1}{(x-1)^2(x+2)}$; 3) $\frac{x+1}{(x^2+1)x}$; 4) $\frac{1}{x^3+1}$.

9. Виділити цілу частину дробу $\frac{x^3+1}{x^2-4x+5}$.

10. Обчислити інтеграли від елементарних дробів:

$$1)\int\frac{dx}{x-3};\ 2)\ \int\frac{dx}{5-2x};\ 3)\ \int\frac{dx}{(x-2)^3};\ 4)\ \int\frac{dx}{x^2+4x+6};\ 5)\ \int\frac{3x+4}{x^2+7x+14}dx.$$

11. Обчислити інтеграл від раціональних функцій:

$$1)\int\frac{x^2+x+5}{x(x+3)(x-2)}dx;\ 2)\ \int\frac{3x-1}{(x-1)^2(x^2+1)}dx;\ 3)\int\frac{2x^4-2x^3+5x^2+x-1}{2x^3-x-1}dx.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити інтеграли:

$$1)\ \int(2x^2-3)^3dx;\quad 2)\ \int(3^x-5^x)^2dx;\ 3)\ \int\frac{dx}{\sqrt{1+25x^2}};$$

$$4)\int\frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}};\qquad 5)\ \int\frac{e^{3x}+1}{1+e^x}dx;\qquad 6)\ \int\frac{x^3-1}{x+1}dx.$$

2. Методом заміни змінної обчислити інтеграли:

$$1)\ \int\frac{2x}{x^2+5}dx;\qquad 2)\ \int\frac{x}{1-x^2}dx;\qquad 3)\ \int\frac{x^2}{4+3x^3}dx;\quad 4)\ \int\frac{e^x}{5+e^x}dx;$$

$$5)\int\frac{\sin x}{5+7\cos x}dx;\ \ 6)\ \int\frac{dx}{x\ln x};\qquad 7)\ \int e^{x^3}x^2dx;\qquad 8)\ \int e^{\sin x}\cos x dx.$$

3. Інтегруванням частинами обчислити інтеграли:

$$1)\ \int(x+1)e^{-x}dx;\quad 2)\ \int(x^2+5x+6)\cos xdx;\ 3)\ \int\ln xdx;4)\int\arcsin xdx;$$

$$5)\ \int x^3\ln xdx;\ 6)\ \int\frac{\ln x}{x^2}dx;\ 7)\ \int x\ln^2 xdx;\ 8)\int e^{2x}\cos 3xdx.$$

4. Проінтегрувати елементарні дроби:

$$1)\ \int\frac{dx}{x-3};\ 2)\ \int\frac{dx}{5-x};3)\ \int\frac{dx}{2x-1};4)\ \int\frac{dx}{(x-2)^3};$$

$$5)\ \int\frac{dx}{(x+3)^5};\ 6)\ \int\frac{dx}{x^2+x+1};\ 7)\ \int\frac{3x-11}{x^2+8x+18}dx.$$

5. Обчислити інтеграли:

$$1)\int\frac{x^3+x+2}{(x-3)(x-4)}dx;\ 2)\ \int\frac{2x+3}{x^2-7x+12}dx;\ 3)\ \int\frac{dx}{1-x^4};$$

4) $\int \frac{x}{1+x^3}dx$; 5) $\int \frac{x^4+5x^3-7x^2+5}{x^3-x^2+5x-5}dx$.

Практичне заняття

***Мета**: опанувати техніку обчислення інтегралів від функцій за допомогою універсальної та інших підстановок; навчитися правильно вибирати підстановку в інтегралах від лінійних, дробово-лінійних і квадратичних ірраціональностей, яка дозволяє позбутися від ірраціональності й обчислити інтеграл, а також опанувати техніку інтегрування диференціальних біномів.*

Контрольні питання

1. Яку підстановку слід робити в інтегралах типу

$$\int R\left(x,(ax+b)^{\frac{m}{n}},\ldots,(ax+b)^{\frac{r}{s}}\right)dx,$$

де R – раціональна функція своїх аргументів?

2. Якою підстановкою обчислюються інтеграли типу

$$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx?$$

3. Як обчислюються інтеграли типу $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$?

4. Якою підстановкою обчислюються інтеграли типу $\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$?

5. Якою підстановкою обчислюються інтеграли типу $\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$?

6. Якою підстановкою обчислюються інтеграли типу $\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$?

7. Наведіть теорему Чебишева про інтегрування диференціального бінома

$$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx.$$

8. Якою підстановкою інтеграли типу $\int R(\sin x,\cos x)dx$ у загальному випадку зводяться до інтегрування раціональних функцій?

9. Яку підстановку слід робити, якщо виконується рівність $R(-\sin x,\cos x)\equiv -R(\sin x,\cos x)$?

10. Яку підстановку слід робити, якщо виконується рівність $R(\sin x, -\cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x)$?

11. Яку підстановку слід робити, якщо виконується рівність $R(-\sin x, -\cos x) \equiv R(\sin x, \cos x)$?

Задачі для розв'язання

1. Обчислити інтеграли:

$$1) \int \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}};\ 2) \int \frac{xdx}{\sqrt[3]{2x-3}};\ 3) \int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}} dx;\ 4) \int \frac{x^4}{\sqrt{x-1}} dx;\ 5) \int \frac{\sqrt{3x+4}}{x^2} dx.$$

2. Обчислити інтеграли:

$$1) \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 9}; \qquad 2) \int \frac{3x-7}{\sqrt{5x^2 + 8x + 1}} dx.$$

3. Обчислити інтеграли:

$$1) \int x^{-1} \left(1 + x^{\frac{1}{3}}\right)^{-3} dx; \qquad 2) \int \frac{dx}{\sqrt[3]{1 + x^3}}.$$

4. Обчислити інтеграли:

$$1) \int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}} dx; \qquad 2) \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}; \qquad 3) \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}.$$

5. Обчислити інтеграли:

$$1) \int \frac{dx}{3\cos x + 2}; \qquad 2) \int \sin^2 x \cos^3 x dx; \quad 3) \int \sin 3x \cos 5x dx; \quad 4) \int \frac{dx}{\cos^3 x}.$$

Завдання для самостійної роботи

1. *Обчислити інтеграли:*

$$1) \int \frac{\sqrt[3]{x}}{x\left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right)} dx; \qquad 2) \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}; \qquad 3) \int \frac{\sqrt{x-5}}{x^3} dx; \qquad 4) \int \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x^3} dx;$$

$$5) \int \frac{dx}{\sqrt{3 + 2x - 5x^2}}; \qquad 6) \int \frac{2x+5}{\sqrt{7 + 8x - 11x^2}} dx; \quad 7) \int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx.$$

2. *Обчислити інтеграли:*

1) $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$; 2) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x} dx$; 3) $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$;

4) $\int \sin 3x \sin^2 x dx$; 5) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$; 6) $\int \cos^4 \frac{x}{2} dx$.

13. Визначені інтеграли та їх застосування

Практичне заняття

***Мета**: навчитися обчислювати визначені інтегралі за формулою Ньютона-Лейбніца, засвоїти методи заміни змінної та інтегрування частинами у визначених інтегралах.*

Контрольні питання

1. Наведіть геометричний зміст визначеного інтеграла.
2. Сформулюйте достатні умови інтегрованості функції.
3. Наведіть формулу заміни змінної у визначеному інтегралі. При яких умовах ця формула має місце?
4. Наведіть формулу Ньютона-Лейбніца.
5. Наведіть формулу інтегрування частинами визначеного інтеграла.
6. Виясніть (не обчислюючи), який із інтегралів більший:

$$\int_1^2 e^{x^2} dx \quad \text{чи} \quad \int_1^2 e^x dx\,?$$

Задачі для розв'язання

1. Обчислити інтеграли, застосовуючи формулу Ньютона-Лейбніца:

1) $\int_a^b \sin x dx$; 2) $\int_0^1 x^2 dx$; 3) $\int_1^2 e^x dx$; 4) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$; 5) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

2. Обчислити інтеграли, застосовуючи формулу заміни змінної:

1) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x+\pi) dx$; 2) $\int_0^1 e^{2x} dx$; 3) $\int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2}$; 4) $\int_1^3 x^3 \sqrt{x^2-1} dx$;

5) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos x dx$; 6) $\int\limits_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$; 7) $\int\limits_1^4 \frac{\sqrt{x} dx}{1+\sqrt{x}}$.

3. Обчислити інтеграли, застосовуючи формулу інтегрування частинами:

1) $\int\limits_0^1 xe^x dx$; 2) $\int\limits_0^{\pi/2} x \cos 2x dx$; 3) $\int\limits_0^{\pi} x^2 \sin x dx$; 4) $\int\limits_0^1 arctgx dx$.

4. Знайти об’єм продукції, випущеної за 5 років, якщо функція Кобба-Дугласа має вигляд $y = (1+2t)e^{4t}$.
5. За даними дослідження у розподілі прибутку в одній із країн крива Лоренца може бути описана рівнянням $y = 2 - \sqrt{4 - x^2}$, де x – доля населення, y – доля прибутку населення. Обчислити коефіцієнт Джині.
6. Визначити дисконтний прибуток за три роки при процентній ставці 8%, якщо базові капіталовкладення склали 10 млн. гривень, а очікуване зростання капіталу – 1 млн. гривень.
7. Знайти середній час, що затрачений на освоєння випуску одного виробу в період освоєння від 10 до 20 виробів, якщо затрата часу на 1-й виріб $\alpha = 200$ хв., показник виробничого процесу $\beta = 0{,}5$.

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити інтеграли, застосовуючи формулу заміни змінної:

1) $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{1+\sqrt{x}}$; 2) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x^3 \sqrt{1+x^2} dx$; 3) $\int\limits_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$.

2. Обчислити інтеграли, застосовуючи формулу інтегрування частинами:

1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$; 2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x dx$; 3) $\int\limits_1^e \ln^2 x dx$; 4) $\int\limits_1^2 x \ln x dx$;

5) $\int\limits_0^1 x arctgx dx$; 6) $\int\limits_0^{1/2} \arcsin x dx$.

Практичне заняття

***Мета**: ознайомитися із практичним застосуванням визначеного інтеграла; навчитися обчислювати площі плоских фігур та об'єми тіл обертання.*

Контрольні питання

1. Наведіть приклади використання поняття визначеного інтеграла в економіці.
2. Як обчислюються площі плоских фігур?
3. Як обчислюються об'єми тіл обертання?

Задачі для розв'язання

1. Нехай функція $y = f(t)$ описує зміну продуктивності праці деякого підприємства за певний час. Знайти об'єм продукції, що випущена за проміжок часу $[0; T]$.
2. Знайти площу фігури, яка обмежена лініями $y = \sqrt{x}$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$.
3. Знайти площу фігури, яка обмежена лініями $y = x^2 - 5x + 6$, $x = 2$, $x = 3$, $y = 0$.
4. Знайти площу фігури, яка обмежена лініями $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.
5. Знайти площу фігури, яка обмежена лініями $y = x$, $y = 2 - x^2$.
6. Знайти площу фігури, яка обмежена лініями $y = x$, $y = \dfrac{1}{x^2}$, $y = 0$, $x = 0$.
7. Обчислити об'єм тіла, що отримане обертанням фігури, обмеженої лініями $y = x^2 - 6x + 5$, $y = 0$, навколо осі *0x.*
8. Обчислити об'єм тіла, що отримане обертанням фігури, обмеженої лініями $y = -x^2 + 1$, $x = 1$, $x = 0$, $y = 0$, навколо осі *0x.*
9. Обчислити об'єм тіла, що отримане обертанням фігури, обмеженої лініями $y = x$, $y^2 = 5x - 4$, навколо осі *0y.*
10. Визначити обсяг продукції, виробленої робітником за другу годину роботи дня, якщо продуктивність праці характеризується функцією $f(t) = \dfrac{2}{3t + 4} + 3$.

11. Комп'ютер коштує 2 тис. грош. од. Прибуток від зробленої на комп'ютері роботи визначається функцією $s(t) = 4t^3 + 10t^2 + 4t + 5$, де t – час (років), s – заощадження (тис. грош. од.). Через який час покриються витрати на придбання комп'ютера?

Завдання для самостійної роботи

1. *Знайти площі фігур, які обмежені лініями:*

   1) $y = 4 - x^2$, $y = 0$;

   2) $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$;

   3) $y = x^2$, $y = 2 - x^2$;

   4) $y = \sin 3x$, $y = 0$, $0 \le x \le \pi/3$;

   5) $y = x^2 - 4$, $y = 4 - x^2$;

   6) $y = x^2 - 2x + 2$, $y = 4x - 7$, $x = 0$;

   7) $y = (x+2)^2$, $y = 4 - x$.

2. Обчислити об'єм тіла, що отримане обертанням фігури, обмеженої лініями $y = x^2 - 2$, $y = 0$, навколо осі *0x*.

3. Обчислити об'єм тіла, що отримане обертанням фігури, обмеженої лініями $y = x$, $y = x^2$, навколо осі *0x*.

4. Обчислити об'єми тіл, що отримані обертанням фігури, обмеженої лініями $y = \sqrt{x}$, $y = 2 - x$, навколо осі *0x* та *0y*.

5. Визначити запас товару на складі, що утвориться за 2 дні, якщо надходження товарів характеризується функцією $f(t) = 3t^2 + 3t + 4$.

6. Енергозберігаюче обладнання коштує 75 тис. грош. од. Заощадження від використання такого обладнання визначається функцією $s(t) = 40e^{-0,5t}$, де t – час (років), s – заощадження (тис. грош. од.). Через який час фірма покриє витрати на придбання обладнання?

14. Подвійні інтеграли та їх застосування

Практичне заняття

***Мета**: засвоїти поняття подвійного інтеграла, як об'єму циліндричного бруса, навчитися приводити подвійні інтеграли до повторних та опанувати техніку їх обчислення.*

Контрольні питання

1. Дайте визначення подвійного інтеграла від функції $f(x, y)$ по області *D*.
2. Чому дорівнює об'єм циліндричного бруса, який зверху обмежений поверхнею $z = f(x, y)$, і в основі якого лежить прямокутник $[a, b] \times [c, d]$?
3. Чому дорівнює об'єм циліндричного бруса, який зверху обмежений поверхнею $z = f(x, y)$, і в основі якого лежить криволінійна трапеція, обмежена двома кривими $y = f(x)$, $y = g(x)$, $a \le x \le b$?
4. Які ви знаєте властивості подвійного інтеграла?
5. Наведіть теорему про зведення подвійного інтеграла до повторного у випадку прямокутної області.
6. Наведіть теорему про зведення подвійного інтеграла до повторного у випадку криволінійної області.

Задачі для розв'язання

1. Обчислити повторні інтеграли:

   1) $\int_0^1 dx \int_0^x (x + 2y)dy$; 2) $\int_1^2 dx \int_x^{2x} (xy - y^2)dy$; 3) $\int_2^6 dx \int_x^{2x} \frac{y}{x} dy$; 4) $\int_0^1 dx \int_{1/x}^{x} \frac{x^2}{y^2} dy$.

2. Обчислити подвійні інтеграли, привівши їх до повторних:

   1) $\iint\limits_{[0,1]\times[1,2]} (x + y^3)dxdy$; 2) $\iint\limits_{[-1,1]\times[0,2]} (x^2 y + \sqrt{y})dxdy$; 3) $\iint\limits_{[3,4]\times[1,2]} \frac{dxdy}{(x+y)^2}$.

3. Обчислити інтеграл $\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2}{1 + y^2} dxdy$.

4. Обчислити інтеграл $\iint\limits_D (2x+y)dxdy$, де D – множина точок, обмежена осями координат та прямою $x+y=3$.
5. Обчислити інтеграл $\iint\limits_D (x+6y)dxdy$, де D – множина точок, обмежена прямими $y=x$, $y=5x$, $x=1$.
6. Обчислити інтеграл $\iint\limits_D \cos(x+y)dxdy$, де D – множина точок, обмежена прямими $x=0$, $y=x$, $y=\pi$.
7. Обчислити інтеграл $\iint\limits_D (x-y)dxdy$, де D – множина точок, обмежена прямими $y=2-x^2$, $y=2x-1$.

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити інтеграли:

   1) $\int\limits_1^3\int\limits_2^5 (5x^2y-2y^3)dxdy$; 2) $\int\limits_0^4 dx\int\limits_1^e x\ln y dy$.
2. Обчислити інтеграл $\iint\limits_D (x+y^5)dxdy$, де D – множина точок, обмежена прямими $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=\sqrt{1-x^2}$.
3. Обчислити інтеграл $\iint\limits_D (x^2+y)dxdy$, де D – множина точок, обмежена прямими $y=x^2$, $y^2=x$.
4. Обчислити інтеграл $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}dxdy$, де D – множина точок, обмежена прямими $x=2$, $y=x$, $xy=1$.

Приклади розв'язання задач до теми 3

1. Обчислити невизначені інтеграли. Результат перевірити диференціюванням:

а) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln x}}$ *;*

б) $\int \frac{arctg^3 5x}{1+25x^2}dx$ *;*

в) $\int x\cos 3x dx$ *;*

г) $\int \frac{x^2-3x+10}{(x-1)(x^2+3)}dx$ *.*

<u>Розв'язання</u>

а) Обчислимо інтеграл методом заміни змінної:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln x}} = \left| \begin{array}{l} t = 1-\ln x \\ dt = -\frac{dx}{x} \\ \frac{dx}{x} = -dt \end{array} \right| = -\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\int t^{-\frac{1}{2}}dt = -\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C =$$

$$= -2\sqrt{t} + C = -2\sqrt{1-\ln x} + C.$$

<u>Перевірка:</u>

$$\left(-2\sqrt{1-\ln x} + C\right)' = \frac{2}{2x\sqrt{1-\ln x}} = \frac{1}{x\sqrt{1-\ln x}}.$$

б) Обчислимо інтеграл методом заміни змінної:

$$\int \frac{arctg^3 5x}{1+25x^2}dx = \left| \begin{array}{l} t = arctg 5x \\ dt = \frac{5dx}{1+25x^2} \\ \frac{dx}{1+25x^2} = \frac{1}{5}dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{5}t^3 dt = \frac{1}{20}t^4 + C = \frac{1}{20}arctg^4 5x + C.$$

<u>Перевірка:</u>

$$\left(\frac{1}{20}\mathrm{arctg}^4 5x + C\right)' = \frac{4}{20}\mathrm{arctg}^3 5x \cdot \frac{5}{1+(5x)^2} = \frac{\mathrm{arctg}^3 5x}{1+25x^2}.$$

в) Застосуємо формулу інтегрування по частинах

$\int u dv = uv - \int v du$:

$$\int x\cos 3x dx = \left| \begin{array}{c} u = x \\ dv = \cos 3x dx \\ du = dx \\ v = \frac{1}{3}\sin 3x \end{array} \right| = \frac{1}{3}x\sin 3x - \frac{1}{3}\int \sin 3x dx = \frac{1}{3}x\sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x + C.$$

<u>Перевірка:</u>

$$\left(\frac{1}{3}x\sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x + C\right)' = \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{3}x \cdot 3\cos 3x - \frac{3}{9}\sin 3x = x\cos 3x.$$

г) Використаємо метод інтегрування раціональних дробів. Для цього представимо підінтегральний дріб у вигляді суми найпростіших дробів:

$$\frac{x^2 - 3x + 10}{(x-1)(x^2+3)} = \frac{A}{x-1} - \frac{Bx + C}{x^2+3} = \frac{A(x^2+3) + (Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+3)}.$$

Прирівняємо чисельники дробів правої та лівої частин:

$$A(x^2+3) + (Bx+C)(x-1) = x^2 - 3x + 10 .$$

Нехай x=1, тоді 4A=8, A = 2;

x=0, тоді 3A–C=10, C= –4;

x=2, тоді 7A+2B+C=8, B= –1.

Отже,

$$\int \frac{x^2 - 3x + 10}{(x-1)(x^2+3)}dx = \int\left(\frac{2}{x-1} + \frac{-x-4}{x^2+3}\right)dx = 2\int\frac{dx}{x-1} - \int\frac{xdx}{x^2+3} - 4\int\frac{dx}{x^2+3} =$$

$$2\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+3) - \frac{4}{\sqrt{3}}arctg\frac{x}{\sqrt{3}} + C.$$

<u>Перевірка:</u>

$$\left(2\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+3\right) - \frac{4}{\sqrt{3}}arctg\frac{x}{\sqrt{3}} + c\right)' = \frac{2}{x-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+3}\cdot 2x -$$

$$-\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{1+\frac{x^2}{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{x-1} - \frac{x}{x^2+3} - \frac{4}{x^2+3} = \frac{2x^2 + 6 - x^2 + x - 4x + 4}{(x-1)^2(x+3)} = \frac{x^2 - 3x + 10}{(x-1)^2(x+3)}.$$

2. Обчислити визначений інтеграл методом заміни змінної $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$.

Розв’язання.

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \left| \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x} dx \\ \alpha = \ln 1 = 0 \\ \beta = \ln e = 1 \end{array} \right| = \int_0^1 t dt = \left. \frac{t^2}{2} \right|_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}.$$

3. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = -x^2 + 4x + 5$ *та* $y = 2x - 3$.

Розв’язання.

а) Побудуємо параболу.

Для цього знайдемо координати її вершини:

$$x_в = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{-2} = 2, \qquad y_в = -2^2 + 4 \cdot 2 + 5 = 9.$$

Отже, A(2; 9) – вершина параболи.

Знайдемо координати точок перетину параболи з віссю OX: y=0, тобто $-x^2 + 4x + 5 = 0$.

Корені цього рівняння $x_1 = -1$, $x_2 = 5$.

Таким чином, D(-1; 0) і F(5; 0) – точки перетину параболи з віссю OX.

б) Побудуємо пряму. Для цього знайдемо точки перетину її з осями координат: $B\left(\frac{3}{2}; 0\right)$ та C(0; -3).

Побудуємо рисунок (рис. 1).

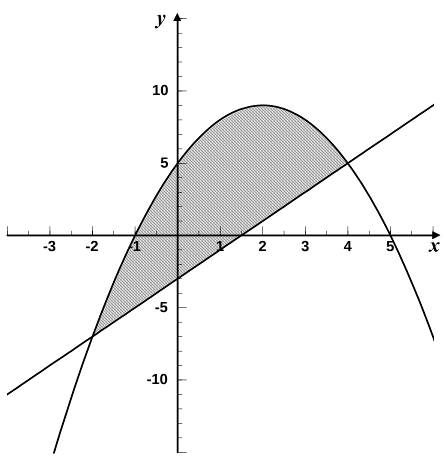


Рис. 1.

в) Для знаходження границь інтегрування знайдемо точки перетину параболи та прямої. Для цього розв'язуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 4x + 5 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$$

Тобто $x^2 - 2x - 8 = 0$; x_1=–2, x_2=4.

г) Обчислюємо шукану площу за формулою:

$$S = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx,$$

де $f(x) = -x^2 + 4x + 5$, $g(x) = 2x - 3$, a=–2, b=4:

$$S = \int_{-2}^{4} (-x^2 + 4x + 5 - (2x - 3))dx = \int_{-2}^{4} (-x^2 + 2x + 8)dx =$$

$$\left.\left(-\frac{x^2}{3} + x^2 + 8x\right)\right|_{-2}^{4} = -\frac{4^2}{3} + 4^2 + 8 \cdot 4 - \left(-\frac{(-2)^2}{3} + (-2)^2 + 8 \cdot (-2)\right) = 36 \textit{кв.од.}$$

ТЕМАТИЧНА КОНТРОЛЬНА РОБОТА №3

ІНТЕГРАЛИ

Завдання для тематичної контрольної роботи

Завдання I

Знайти невизначені інтеграли. Результат перевірити диференціюванням.

1. $\int \frac{\arcsin 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$.

2. $\int \frac{xdx}{x^4+25}$.

3. $\int x^3 \ln xdx$.

4. $\int \frac{6x^2-18x-6}{(x+1)(x-2)(x-5)}dx$.

5. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2+\ln x}}$.

6. $\int \frac{x^2dx}{16-x^6}$.

7. $\int x\sin 3xdx$.

8. $\int \frac{5x^2-13x+9}{(x-2)^2(x+1)}dx$.

9. $\int \frac{\mathrm{arctg}^3 xdx}{1+x^2}$.

10. $\int \frac{xdx}{\sqrt{4-x^4}}$.

11. $\int xe^{-2x}dx$.

12. $\int \frac{3x^2-x-2}{(x-2)(x^2+4)}dx$.

13. $\int \frac{\sin xdx}{\cos^2 x}$.

14. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4+x^6}}$.

15. $\int \operatorname{arctg} 5x dx$.

16. $\int \frac{6x^2 - 14x - 22}{(x+2)(x-3)(x-4)} dx$.

17. $\int \frac{e^{3x} dx}{e^{3x} + 5}$.

18. $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{25 - x^{10}}}$.

19. $\int \frac{x dx}{\sin^2 x}$.

20. $\int \frac{5x^2 - 13x + 6}{(x-1)^2 (x-3)} dx$.

21. $\int \frac{\arccos 3x}{\sqrt{1-9x^2}} dx$.

22. $\int \frac{x^3 dx}{x^8 - 16}$.

23. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$.

24. $\int \frac{3x^2 + 5x + 12}{(x+1)(x^2+9)} dx$.

25. $\int \frac{\cos x dx}{\sin^3 x}$.

26. $\int \frac{x dx}{\sqrt{9+x^4}}$.

27. $\int \arcsin 3x dx$.

28. $\int \frac{6x^2 + 14x - 32}{(x+3)(x+5)(x-7)} dx$.

29. $\int \frac{\ln^3 x}{x} dx$.

30. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{9+x^8}}$.

Завдання II

Обчислити визначений інтеграл методом заміни змінної.

1. $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x dx$.

2. $\int_0^8 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}}$.

3. $\int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln x)}$.

4. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$.

5. $\int_1^3 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$.

6. $\int_0^{\pi/6} \cos^3 x dx$.

7. $\int_1^e \frac{\sqrt{1-\ln x}}{x} dx$.

8. $\int_4^9 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

9. $\int_0^{\pi/3} \sin^3 x dx$.

10. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}$.

11. $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x dx$.

12. $\int_0^8 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}}$.

13. $\int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln x)}$.

14. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$.

15. $\int_1^3 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$.

16. $\int\limits_0^{\pi/6} \cos^3 x dx$.

17. $\int\limits_1^{e} \frac{\sqrt{1-\ln x}}{x} dx$.

18. $\int\limits_4^{9} \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

19. $\int\limits_0^{\pi/3} \sin^3 x dx$.

20. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}$.

21. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x dx$.

22. $\int\limits_0^{8} \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}}$.

23. $\int\limits_1^{e} \frac{dx}{x(1+\ln x)}$.

24. $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$.

25. $\int\limits_1^{3} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$.

26. $\int\limits_0^{\pi/6} \cos^3 x dx$.

27. $\int\limits_1^{e} \frac{\sqrt{1-\ln x}}{x} dx$.

28. $\int\limits_4^{9} \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

29. $\int\limits_0^{\pi/3} \sin^3 x dx$.

30. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}$.

Завдання III

Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = ax^2 + bx + c$ *та* $y = kx + d$. *Зробити малюнок.*

1. $y = x^2 + 3x - 3$; $y = 2x + 3$.
2. $y = -x^2 + 5x - 1$; $y = 5 - 2x$.
3. $y = x^2 - x - 5$; $y = 2x - 1$.
4. $y = 3 - 3x - x^2$; $y = -2x - 3$.
5. $y = x^2 + x - 5$; $y = 2x + 1$.
6. $y = 5 + x - x^2$; $y = 1 - 2x$.
7. $y = x^2 - 3x - 3$; $y = 2x - 3$.
8. $y = 5 - x - x^2$; $y = -2x - 1$.
9. $y = x^2 - 5x + 1$; $y = 2x - 5$.
10. $y = 3 + 3x - x^2$; $y = 3 - 2x$.
11. $y = x^2 + 3x - 3$; $y = 2x + 3$.
12. $y = -x^2 + 5x - 1$; $y = 5 - 2x$.
13. $y = x^2 - x - 5$; $y = 2x - 1$.
14. $y = 3 - 3x - x^2$; $y = -2x - 3$.
15. $y = x^2 + x - 5$; $y = 2x + 1$.
16. $y = 5 + x - x^2$; $y = 1 - 2x$.
17. $y = x^2 - 3x - 3$; $y = 2x - 3$.
18. $y = 5 - x - x^2$; $y = -2x - 1$.
19. $y = x^2 - 5x + 1$; $y = 2x - 5$.
20. $y = 3 + 3x - x^2$; $y = 3 - 2x$.
21. $y = x^2 + 3x - 3$; $y = 2x + 3$.

22. $y=-x^2+5x-1$; $y=5-2x$.

23. $y=x^2-x-5$; $y=2x-1$.

24. $y=3-3x-x^2$; $y=-2x-3$.

25. $y=x^2+x-5$; $y=2x+1$.

26. $y=5+x-x^2$; $y=1-2x$.

27. $y=x^2-3x-3$; $y=2x-3$.

28. $y=5-x-x^2$; $y=-2x-1$.

29. $y=x^2-5x+1$; $y=2x-5$.

30. $y=3+3x-x^2$; $y=3-2x$.

ТЕМА 4
ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

15. Диференціальні рівняння першого порядку

Практичне заняття

***Мета**: навчитися розв’язувати диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними однорідні диференціальні рівняння, лінійні диференціальні рівняння першого порядку методом Лагранжа і методом Бернуллі, а також рівняння у повних диференціалах.*

Контрольні питання

1. Що називається загальним розв’язком диференціального рівняння?
2. Що називається частинним розв’язком диференціального рівняння?
3. Наведіть теорему Коші про існування та єдиність розв’язку.
4. Як знайти загальний розв’язок диференціального рівняння з відокремлюваними змінними?
5. Яке диференціальне рівняння називається однорідним?
6. Якою заміною можна звести однорідне диференціальне рівняння до рівняння з відокремленими змінними?
7. Яке диференціальне рівняння називається лінійним?
8. У чому полягає метод Лагранжа?
9. У чому полягає метод Бернуллі?
10. Яке диференціальне рівняння називається рівнянням у повних диференціалах?

Задачі для розв’язання

1. Знайти загальний розв’язок рівняння з відокремленими змінними:

   1) $\frac{dy}{dx} = xy^2 + 2xy$;

   2) $x^2 y^2 y' + 1 = y$;

3) $xydx + (x+1)dy = 0$;

4) $\sqrt{y^2+1}dx = xydy$.

2. Знайти частинний розв’язок рівняння $e^x dx - (1+e^x)ydy = 0$, що задовольняє умову $y(0) = 1$.

3. Знайти загальний розв’язок однорідного рівняння:

1) $xdy = (x+y)dx$;

2) $(x-y)dx + (x+y)dy = 0$;

3) $(y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0$;

4) $y^2 + x^2 y' = xyy'$;

5) $xy' = y - x \cdot e^{\frac{y}{x}}$;

6) $(2x+y+1)dx - (4x+2y-3)dy = 0$.

4. Сумарний прибуток фірми є функцією $y(x)$, де x – кількість виробленої продукції. Граничний прибуток фірми відповідає функції $y'(x) = 50000 - x$. Якою буде функція сумарного прибутку фірми, якщо нульовий випуск продукції дає нульовий прибуток?

5. Розв’язати рівняння:

1) $y' + ytgx = \cos^2 x$;

2) $y' - y = e^{2x}$;

3) $x^2 y' + xy + 1 = 0$;

4) $y = x \cdot (y' - x\cos x)$;

5) $2x(x^2 + y)dx = dy$;

6) $xydy = (y^2 + x)dx$.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти загальний розв’язок рівняння з відокремлюваними змінними:

1) $2x^2 yy' + y^2 = 2$;

2) $y' - xy^2 = 2$;

3) $y' = \dfrac{1+y^2}{1+x^2}$;

4) $y' = (1+x)(y^2+2)$.

2. Знайти частинний розв'язок рівняння $y' = \sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-x^2}}$, що задовольняє умову $y(0)=0$.

3. Знайти загальний розв'язок однорідного рівняння:

1) $(x+2y)dx - xdy = 0$;

2) $(x^2+y^2)y' = 2xy$;

3) $xy' - y = xtg\dfrac{y}{x}$;

4) $x - y - 1 + (y - x + 2)y' = 0$.

4. Виторг від продажу x одиниць товару описується функцією $u(x)$. Граничний виторг відповідає функції $u'(x) = x + 100$. Яким буде виторг за продану продукцію, якщо виторг від продажу 100 одиниць продукції дорівнює 40000 грош. од.?

5. Нехай попит і пропозиція на товар визначаються співвідношенням

$$q = 4p' - 2p + 39, \quad s = 44p' + 2p - 1,$$

де p – ціна на товар, p' - тенденція формування ціни. Нехай також у початковий момент часу ціна p за одиницю товару склала 1 грош. од. Виходячи з вимоги відповідності попиту пропозиції, знайти закон зміни ціни в залежності від часу.

6. Розв'язати рівняння:

1) $y' - y = e^{2x}$;

2) $(2x+1)y' = 4x + 2y$;

3) $(xy + e^x)dx - xdy = 0$;

4) $(x + y^2)dy = ydx$;

5) $(2e^y - x)y' = 1$;

6) $y' + 2y = y^2e^x$.

16. Диференціальні рівняння другого порядку

Практичне заняття

***Мета**: засвоїти методи розв'язування лінійних однорідних та неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами.*

Контрольні питання

1. Яке лінійне диференціальне рівняння другого порядку називається однорідним?
2. Яке рівняння називається неоднорідним?
3. Який вигляд має загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння другого порядку, якщо корені характеристичного рівняння дійсні та різні?
4. Який вигляд має тоді загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння другого порядку, якщо корені характеристичного рівняння дійсні та рівні?
5. Який вигляд має тоді загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння другого порядку, якщо корені характеристичного рівняння комплексні?
6. Яке лінійне диференціальне рівняння другого порядку називається неоднорідним?
7. Як пов'язаний загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку із загальним розв'язком відповідного однорідного рівняння та частинним розв'язком неоднорідного?

Задачі для розв'язання

1. Знайти загальний розв'язок рівняння:

   1) $y'' - 5y' + 6y = 0$;

   2) $y'' + 2y' + y = 0$;

   3) $y'' + 2y' + 5y = 0$.

2. Розв'язати рівняння $y'' - 2y' = 0$.

3. Знайти частинний розв'язок рівняння

$$y'' - 7y' + 12y = 0; \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 0.$$

4. Знайти частинний розв'язок рівняння

$$y'' + 2y' + 2y = 0; \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

5. Розв'язати рівняння $y'' - y' = x^2$.

6. Знайти частинний розв'язок рівняння $y'' + 2y' + 2y = xe^{-x}$; $y(0) = y'(0) = 0$.

7. Розв'язати рівняння $y'' + 4y = 2\cos 2x$.

8. Розв'язати рівняння $y'' - 2y' + y = xe^{x}$.

9. Нехай попит і пропозиція на товар визначаються співвідношенням

$$q = 2p'' - p' - p + 15, \quad s = 3p'' + p' + p + 5,$$

де p – ціна на товар, p' - тенденція формування ціни, p'' - темп зміни ціни. Нехай також у початковий момент часу $p(0) = 6$, $q(0) = s(0) = 10$. Виходячи з вимоги відповідності попиту пропозиції, знайти залежність ціни від часу.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти загальний розв'язок рівняння:

   1) $y'' + y' - 2y = 0$;

   2) $y'' + 4y' + 3y = 0$;

   3) $2y'' - 5y' + 2y = 0$;

   4) $y'' + 4y = 0$.

2. Знайти частинний розв'язок рівняння

$$y'' - 2y' + y = 0; \quad y(2) = 1, \; y'(2) = -2.$$

3. Розв'язати рівняння:

   1) $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$;

   2) $y'' + y' - 2y = 3xe^{x}$;

   3) $y'' + y = 4xe^{x}$;

   4) $y'' - y = 2e^{x} - x^2$;

   5) $y'' - 3y' + 2y = \sin x$;

   6) $y'' + y = 4\sin x$;

   7) $y'' - 3y' + 2y = x\cos x$.

4. Знайти частинний розв’язок рівняння $y'' - 2y' = 2e^x$; $y(1) = -1$, $y'(1) = 0$.
5. Знайти частинний розв’язок рівняння $y'' + y = 4e^x$; $y(0) = 4$, $y'(0) = -3$.
6. Знайти залежність ціни p і попиту q від часу t, якщо попит і пропозиція визначаються співвідношеннями

$$q(t) = p'' - 4p' - p + 17, \quad s(t) = 2p'' + p' + 3p + 5,$$
$$p(0) = 3, \ q(0) = 11,$$
$$q(t) = s(t).$$

Приклади розв'язання задач до теми 4

1. Розв'язати рівняння з відокремлюваними змінними

$$x(1+y^2)+y(1+x^2)y'=0.$$

<u>Розв'язання.</u> Запишемо дане рівняння у вигляді

$$x(1+y^2)dx+y(1+x^2)dy=0.$$

Розділивши обидві частини цього рівняння на добуток $(1+x^2)(1+y^2)\neq 0$, дістанемо рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{x}{1+x}dx+\frac{y}{1+y^2}dy=0.$$

Інтегруючи це рівняння, послідовно знаходимо

$$\int\frac{xdx}{1+x^2}+\int\frac{ydy}{1+y^2}=C_1,$$

$$\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}\ln(1+y^2)=\frac{1}{2}\ln C \quad (C_1=\frac{1}{2}\ln C).$$

Звідси $(1+x^2)(1+y^2)=C$.

2. Розв'язати лінійне рівняння першого порядку методом варіації довільної сталої (методом Лагранжа)

$$y'-2xy=3x^2-2x^4.$$

<u>Розв'язання.</u> Розглянемо однорідне рівняння $\frac{dy}{dx}-2xy=0$. Функція $y\equiv 0$ є розв'язком цього рівняння. Інші його розв'язки знайдемо, відокремлюючи змінні: $\frac{dy}{y}=2xdx$. Звідси знаходимо

$$\ln|y|=x^2+\ln C,\ \ C>0;$$

$$y=Ce^{x^2},\ \ C\in R,\ \ C\neq 0.$$

Розв'язок $y=0$ можна дістати з останньої формули при $C=0$, тому всі розв'язки однорідного рівняння визначаються рівністю $y=Ce^{x^2}$, $C\in R$. Розв'язки вихідного рівняння шукаємо у вигляді $y=C(x)e^{x^2}$. Підставивши цей вираз у дане рівняння, дістанемо

$$\frac{dC(x)}{dx}e^{x^2}+2xe^{x^2}C(x)-2xC(x)e^{x^2}=3x^2-2x^4,$$

$$\frac{dC(x)}{dx}=e^{-x^2}(3x^2-2x^4),\ \ C(x)=\int e^{-x^2}(3x^2-2x^4)dx=x^3e^{-x^2}+C,$$

де $C\in R$ – довільна стала.

Розв'язки заданого рівняння мають вигляд

$$y=(C+x^3e^{-x^2})e^{x^2}=Ce^{x^2}+x^3.$$

3. Розв'язати лінійне рівняння першого порядку методом Бернуллі

$$xy'-2y=2x^4.$$

<u>Розв'язання.</u> Розв'язок шукаємо у вигляді $y=u(x)v(x)$. Маємо $x(u'v+uv')-2uv=2x^4,\ \ xu'v+xuv'-2uv=2x^4,\ \ xu'v+u(xv'-2v)=2x^4.$

Функцію виберемо так, щоб $xv'-2v=0.$

$$x\frac{dv}{dx}=2v,\ \ \frac{dv}{v}=\frac{2dx}{x},\ \ \ln v=2\ln x+\ln C_1,$$

$$\ln v=\ln(Cx^2),\ \ v=Cx^2.$$

Нехай, наприклад $C=1,$ тоді $v(x)=x^2.$

Тоді для функції $u(x)$ дістанемо рівняння $x^3u'=2x^4.$

$$u'=2x,\quad u=x^2+C.$$

Отже, всі розв'язки заданого рівняння визначаються формулою

$$y=(x^2+C)x^2,$$

або

$$y=Cx^2+x^4.$$

4. Знайти загальні розв'язки лінійних однорідних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами

а) $y''+3y'+2y=0;$

б) $y''-8y'=0;$

в) $y''-8y'+16y=0;$

г) $y''+2y'+9y=0.$

Розв’язання.

а) Складемо відповідне характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0.$$

Коренями даного рівняння є числа $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = -1$.

Оскільки корені характеристичного рівняння дійсні різні, то фундаментальну систему розв’язків утворюють функції $e^{\lambda_1 x} = e^{-2x},\ e^{\lambda_2 x} = e^{-x}$.

Отже, загальний розв’язок рівняння має вигляд

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}.$$

б) Складемо відповідне характеристичне рівняння

$$\lambda^2 - 8\lambda = 0.$$

Коренями даного рівняння є числа $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 8$.

Оскільки корені характеристичного рівняння дійсні різні, то фундаментальну систему розв’язків утворюють функції $e^{\lambda_1 x} = e^0 = 1,\ e^{\lambda_2 x} = e^{8x}$.

Отже, загальний розв’язок рівняння має вигляд

$$y = C_1 + C_2 e^{8x}.$$

в) Складемо відповідне характеристичне рівняння

$$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0.$$

Коренями даного рівняння є числа $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$.

Оскільки корені характеристичного рівняння дійсні кратності два, то фундаментальну систему розв’язків утворюють функції $e^{\lambda_1 x} = e^{4x}$ та $xe^{\lambda_1 x} = xe^{4x}$.

Отже, загальний розв’язок рівняння має вигляд

$$y = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x}.$$

г) Складемо відповідне характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + 2\lambda + 9 = 0.$$

Коренями даного рівняння є числа $\lambda_{1,2} = -1 \pm i2\sqrt{2}$.

Оскільки корені характеристичного рівняння комплексні, то фундаментальну систему розв’язків утворюють функції $e^{-x}\cos 2\sqrt{2}x,\ e^{-x}\sin 2\sqrt{2}x$.

Отже, загальний розв’язок рівняння має вигляд

$$y = e^{-x}(C_1 \cos 2\sqrt{2}x + C_2 \sin 2\sqrt{2}x).$$

5. Розв'язати задачу Коші для лінійного однорідного рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами $y'' - 3y' + 2y = 0,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 5.$

<u>Розв'язання.</u>

Загальний розв'язок нашого рівняння має вигляд

$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$ (див. задачу 4а).

Знайдемо y':

$$y' = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x}.$$

$$y(0) = C_1 + C_2 = 0,\ \ y'(0) = C_1 + 2C_2 = 2.$$

Отримали систему рівнянь

$$C_1 + C_2 = 0,$$

$$C_1 + 2C_2 = 2,$$

звідки $C_1 = -2,\ \ C_2 = 2.$

Отже, розв'язок задачі Коші має вигляд:

$$y = -2e^x + 2e^{2x}.$$

ТЕМАТИЧНА КОНТРОЛЬНА РОБОТА №4
ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Завдання для тематичної контрольної роботи

Завдання I

Розв'язати рівняння з відокремлюваними змінними:

1. $xy' - y = 0$.
2. $y^2 + xy' = 0$.
3. $\ln|\cos x| y' + ytgx = 0$.
4. $x\cos x + 2yy' = 0$.
5. $2y\sin x^2 + \dfrac{y'}{x} = 0$.
6. $xy' - y\ln y = 0$.
7. $\left(x^2 y - x^2\right)y' = \left(xy^2 + y^2\right)$.
8. $(y^2 + 4) + xy' = 0$.
9. $\left(y^2 + 3\right) - \dfrac{2}{\sqrt{x}} yy' = 0$.
10. $y' = \left(2y + 1\right) tgx$.
11. $\sin x \; tgy + \dfrac{y'}{\cos x} = 0$.
12. $5^{y-2} y' + x = 0$.
13. $(x^3 + 4)y' + 3x^2\sqrt{1 - y^2} = 0$.
14. $2xy' + \left(1 + x\right)\sin^2 y \, tgy = 0$.
15. $\left(y + 1\right)y' = \dfrac{y}{\sqrt{1 - x^2}} + xy$.

16. $y' = \dfrac{xy^3 + x}{-xy^2 + y^2}$.

17. $(xy - x)^2 y' + y(1 - x) = 0$.

18. $(1 + x^2)y' + y\sqrt{1 + x^2} = 0$.

19. $2^{y-2} y' + (x^3 + x - 5) = 0$.

20. $(y^2 - 2)y' + (x^3 - 6x) = 0$.

21. $(1 - 3y^2)y' = \dfrac{x + 2}{2y}$.

22. $\cos x + (2y - 1)y' = 0$.

23. $3x^2(y + 1) + (x^3 + 1)y' = 0$.

24. $x(y + 1)y' + y(2x^2 + 1) = 0$.

25. $\dfrac{y}{y'} = \ln y$.

26. $(1 + e^{2x})y^2 y' = e^x$.

27. $y'(y^2 - 1) + x^3 = 0$.

28. $y' \sin x - (\cos x - \sin x)(y + 1) = 0$.

29. $xy + (x + 1)y' = 0$.

30. $xy + (1 + y^2)\sqrt{1 + x^2}\, y' = 0$.

Завдання II

Розв'язати лінійне диференціальне рівняння першого порядку

1. $y' - 2xy = 3x$;

2. $xy' - 2y = 2x^4$;

3. $y' + y\cos x = e^{-\sin x}$;

4. $y' + y\,\mathrm{tg}x = \dfrac{1}{\cos x}$;

5. $y' \sin x - y\cos x = -\dfrac{\sin^2 x}{x^2}$;

6. $y'\sin 2x = 2(y + \cos x)$;

7. $y'\cos x - y\sin x = 2\sin 2x$;

8. $xy' + y = \ln x - 1$;

9. $y' + \dfrac{2y}{x} = -\dfrac{2e^{-x^2}}{x}$;

10. $(2x+1)y' + 2y = x$;

11. $y' - 2xy = 3x$;

12. $xy' - 2y = 2x^4$;

13. $y' + y\cos x = e^{-\sin x}$;

14. $y' + y\mathrm{tg}x = \dfrac{1}{\cos x}$;

15. $y'\sin x - y\cos x = -\dfrac{\sin^2 x}{x^2}$;

16. $y'\sin 2x = 2(y + \cos x)$;

17. $y'\cos x - y\sin x = 2\sin 2x$;

18. $xy' + y = \ln x - 1$;

19. $y' + \dfrac{2y}{x} = -\dfrac{2e^{-x^2}}{x}$;

20. $(2x+1)y' + 2y = x$;

21. $y' - 2xy = 3x$;

22. $xy' - 2y = 2x^4$;

23. $y' + y\cos x = e^{-\sin x}$;

24. $y' + y\mathrm{tg}x = \dfrac{1}{\cos x}$;

25. $y'\sin x - y\cos x = -\dfrac{\sin^2 x}{x^2}$;

26. $y'\sin 2x = 2(y + \cos x)$;

27. $y'\cos x - y\sin x = 2\sin 2x$;

28. $xy' + y = \ln x - 1$;

29. $y' + \frac{2y}{x} = -\frac{2e^{-x^2}}{x}$;

30. $(2x+1)y' + 2y = x$.

Завдання III

Розв'язати задачу Коші для лінійного однорідного рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами $y'' + py' + qy = 0,\ y(0) = a,\ y'(0) = b.$

№ варіанту	p	q	a	b
1	2	0	1	0
2	-4	4	0	2
3	2	0	6	1
4	0	1	-1	3
5	2	5	3	4
6	-4	4	0	0
7	6	13	0	0
8	0	1	-2	1
9	2	5	-1	-2
10	-4	8	2	7
11	2	0	1	0
12	-4	4	0	2
13	2	0	6	1
14	0	1	-1	3
15	2	5	3	4
16	-4	4	0	0

17	6	13	0	0
18	0	1	-2	1
19	2	5	-1	-2
20	-4	8	2	7
21	2	0	1	0
22	-4	4	0	2
23	2	0	6	1
24	0	1	-1	3
25	2	5	3	4
26	-4	4	0	0
27	6	13	0	0
28	0	1	-2	1
29	2	5	-1	-2
30	-4	8	2	7

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Лінійна алгебра та аналітична геометрія

Завдання I

При виготовленні деталей п'яти видів витрати електроенергії p, матеріалів – q, робочої сили – m задаються таблицею (в умовних одиницях) (див. табл.).

Обчислити загальну потребу в матеріалах – x_1, робочої сили – x_2, електроенергії – x_3 для виготовлення заданої кількості y_i (i=1,2,…,5) деталей кожного виду. Кількість деталей кожного виду (10; 20; 12; 13; 14).

№ варіанту	Ресурси	Витрати на одну деталь кожного виду				
		1	2	3	4	5
1	p	2	1	0,5	0,7	0,5
	q	1,5	2	3	1	3
	m	4	0,8	5	4	0,8
2	p	3	2	2,5	1,5	0,7
	q	2	1,5	0,8	3	4
	m	1,8	1,7	2,3	2,5	2,4
3	p	1,2	0,8	1,2	1,3	2,5
	q	2	1	2,3	2,7	0,8
	m	2,3	0,9	1,4	1,5	1,6
4	p	1,5	1	3	4	5
	q	3	1,7	0,1	0,2	1,8
	m	3,2	2,3	1,7	1,6	1,5
5	p	3,4	4,2	2,1	2,2	2,3
	q	1,2	1,3	2,4	2,5	2,6
	m	5	1,2	3	1	2,01
6	p	2,1	0,96	0,7	0,8	0,9
	q	2,2	0,98	1,2	1,31	1,33
	m	1,8	1,3	0,44	0,51	0,61
7	p	2,3	3,2	1,08	3,01	2,4
	q	1,9	2,4	1,09	2,98	2,5

	m	2,4	1,71	1,1	2,7	2,01
8	p	1,7	2,1	1,11	2,6	3,01
	q	1,6	2,2	2,04	2,41	3,02
	m	1,5	2,3	3,08	2,5	3,6
9	p	1,01	0,98	0,94	3	3,5
	q	1,21	2,0	1,25	1	4,2
	m	1,3	3,4	1,31	0,44	0,12
10	p	1,4	3,5	1,18	0,45	1,01
	q	1,07	3,6	1,03	2,01	1,12
	m	1,12	3,7	2,05	3,02	1,15
11	p	1,13	3,8	2,06	3,03	1
	q	0,96	3,9	2,08	1,96	0,71
	m	0,82	2,1	3,01	1,97	0,24
12	p	1,01	2,2	1,12	0,81	0,48
	q	2,3	2,3	1,14	0,74	1,21
	m	2,4	2,5	1,15	0,35	0,96
13	p	2,01	2,8	3,01	0,46	0,84
	q	3,1	2,04	2,98	0,96	0,71
	m	3,01	3,21	0,71	1,08	0,65
14	p	2,05	3,08	0,82	1,09	0,66
	q	2,06	4,12	0,34	1,2	0,72
	m	2,71	1,71	0,91	1,3	0,44
15	p	2,3	2,1	2,01	3,01	3,04
	q	2,01	2,08	2,1	2,2	2,3
	m	1,98	2,09	3,42	3,43	0,48
16	p	1,88	1,2	2,09	3,01	4,02
	q	1,78	1,3	3,08	3,09	1,21
	m	1,68	1,31	0,44	0,96	1,08
17	p	1,58	0,44	2	2,3	2,42
	q	1,43	0,86	1,06	2,03	1,01
	m	1,44	0,71	0,9	1,23	0,44
18	p	1,5	0,32	0,7	1,25	1
	q	1	1,09	0,8	1,4	0,82
	m	0,71	1,1	1	1,37	0,96
19	p	0,62	1,24	0,32	3,2	0,28

	q	0,34	1,31	0,44	0,39	1,08
	m	0,96	0,82	0,56	1,07	3,2
20	p	0,8	1,84	0,72	1,06	3,1
	q	0,7	0,37	0,38	2,02	2,04
	m	0,6	0,96	0,96	2,01	1,42
21	p	2	1	0,5	0,7	0,5
	q	1,5	2	4	1	3
	m	4	0,8	5	4	0,2
22	p	3	2	2,5	1,5	0,7
	q	2	1,5	0,8	3	4
	m	1,8	1	2,3	2,5	2,1
23	p	1,2	0,8	1,2	1,3	2,5
	q	2	1	2,3	2,6	0,8
	m	1,1	0,9	1,4	1,5	1,6
24	p	1,5	1	3	4	5
	q	3	1,7	0,1	0,8	1,8
	m	4,2	2,3	1,7	1,6	1,5
25	p	3,4	4,2	2,1	2,2	2,3
	q	1,2	1,3	2,4	2,6	2,6
	m	4	1,2	3	1	2,01
26	p	2,1	0,96	0,7	0,8	0,9
	q	2,2	1	1,2	1,31	1,33
	m	1,8	1,3	0,44	0,51	0,61
27	p	2,3	3,2	1,08	3	2,4
	q	1,9	2,6	1,09	2,98	2,5
	m	2,4	1,71	1,1	2,7	2,01
28	p	1,7	2,1	1,11	2,6	3,01
	q	1,6	2,2	2,04	2,41	3,02
	m	1,5	2,3	3,08	2,5	3,6
29	p	1	0,98	0,94	3	3,5
	q	1,21	2,0	1,25	1	4,2
	m	1,3	3,4	1,3	0,42	0,12
30	p	1,4	3,5	1	0,45	1,01
	q	1	3,6	1,03	2,01	1,12
	m	1,12	3,7	2,05	3	1,15

Завдання II

Дано піраміду з вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 (див табл.). Знайти об'єм піраміди, площу грані A_1, A_2, A_3, висоту піраміди, яка опущена на цю грань. Скласти рівняння площини $A_1A_2A_3$ та ребра A_1A_2.

№ варіанту	A_1	A_2	A_3	A_4
1	3; 1; -2	1; -2; 1	-2; 1; 0	2; 2; 5
2	1; -2; 1	3; 1; -2	2; 2; 5	-2; 1; 0
3	-2; 1; 0	2; 2; 5	3; 1; -2	1; -2; 1
4	2; 2; 5	-2; 1; 0	1; -2; 1	3; 1; -2
5	4; 0; 0	-2; 1; 2	1; 3; 2	3; 2; 7
6	-2; 1; 2	4; 0; 0	3; 2; 7	1; 3; 2
7	1; 3; 2	3; 2; 7	4; 0; 0	-2; 1; 2
8	3; 2; 7	1; 3; 2	-2; 1; 2	4; 0; 0
9	1; -1; 6	4; 5; -2	-1; 3; 0	6; 1; 5
10	4; 5; -2	1; -1; 6	6; 1; 5	-1; 3; 0
11	-1; 3; 0	6; 1; 5	1; -1; 6	4; 5; -2
12	6; 1; 5	-1; 3; 0	4; 5; -2	1; -1; 6
13	3; 1; 4	-1; 6; 1	-1; 1; 6	0; 4; -1
14	3; 3; 9	6; 9; 1	1; 7; 3	8; 5; 8
15	3; 5; 4	5; 8; 3	1; 9; 9	6; 4; 8
16	9; 5; 5	-3; 7; 1	5; 7; 8	6; 9; 2
17	7; 5; 3	9; 4; 4	4; 5; 7	8; 9; 8
18	6; 6; 2	5; 4; 7	2; 4; 7	7; 3; 0
19	0; 7; 1	4; 1; 5	4; 6; 3	3; 9; 8
20	10; 6; 8	-2; 8; 2	6; 8; 9	7; 10; 3
21	3; 1; 2	1; -2; 1	4; 1; 0	2; 2; 5
22	1; 2; 1	3; 1; -2	2; 1; 5	-2; 1; 0
23	-2; 1; 0	2; 2; 1	3; 1; -2	1; -2; 4
24	2; 2; -1	-2; 1; 0	1; -2; 1	1; 1; -2
25	4; 0; -2	-2; 1; 2	1; 3; 2	3; 2; 7
26	-2; 1; 2	4; 1; -5	3; 2; 7	1; 4; 2
27	1; 3; 2	3; 2; 0	4; 0; 7	-2; 1; 2
28	3; 2; 2	1; 3; 2	-2; 1; 4	4; 0; 0
29	1; -1; 6	4; 5; -2	-1; 3; 8	6; 1; 5
30	4; 5; -1	1; -1; 6	6; 1; 5	-1; 3; 0

Завдання III

Необхідно відновити межі квадратного наділу землі по трьом стовпам, що залишилися, одному в центрі і по одному – на двох протилежних межах. Скласти рівняння прямих, які утворюють межі наділу, якщо на плані координати стовпів: $M(x_1, y_1)$ – в центрі, $A(x_2, y_2)$, $B(x_3, y_3)$ – на сторонах (див. табл.). Побудувати наділ на рисунку.

№ варіанту	x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3
1	1	6	5	9	3	0
2	6	1	9	5	0	3
3	-3	1	5	3	6	4
4	1	-3	3	5	4	6
5	2	1	1	2	3	4
6	3	2	0	2	9	1
7	10	1	3	4	5	6
8	7	8	9	1	2	3
9	4	5	6	1	2	0
10	0	1	2	3	3	2
11	2	3	2	2	3	4
12	1	2	0	1	2	9
13	7	1	0	1	2	1
14	3	1	2	1	1	3
15	4	1	1	4	5	5
16	3	1	4	3	4	5
17	2	1	3	2	2	4
18	0	1	2	3	3	3
19	1	2	3	2	4	2
20	0	2	1	4	5	1
21	1	4	5	9	2	0
22	3	1	9	1	0	3
23	3	1	2	3	6	4
24	1	-3	-1	5	4	2
25	2	-1	1	2	1	4
26	3	-2	0	2	4	1
27	0	1	3	-4	5	6
28	7	8	2	1	2	-3
29	-2	5	1	1	2	0
30	0	-1	2	3	-2	2

Завдання IV

Матрична модель структурного балансу фірм, що випускають високотехнологічні товари, зокрема, комп'ютери, має вигляд

$$(E - A)X=Y,$$

де X – невідомий вектор випуску, Y – вектор попиту (вектор кінцевого продукту), A – *структурна матриця випуску*, E – одинична матриця відповідного розміру. Треба за допомогою поняття оберненої матриці знайти вектор випуску. Конкретні значення матриць A і Y наведені в таблиці варіантів. Розрахунки можна виконувати вручну або за допомогою електронних таблиць EXCEL чи математичного пакета MATHCAD (рекомендується) [6].

№ варіанту	A			Y
1	0,1	0,25	0,2	100
	0,32	0,14	0,04	100
	0,01	0,06	0,31	110
2	0,01	0,03	0,08	180
	0,05	0,22	0,14	150
	0,2	0,17	0,06	140
3	0,01	0,52	0,07	230
	0,6	0,1	0,28	190
	0,03	0,04	0,3	180
4	0,04	0,2	0,21	340
	0,12	0,29	0,34	240
	0,8	0,05	0,07	200
5	0,26	0,14	0,06	500
	0,31	0,06	0,43	300
	0,1	0,5	0,3	230
6	0,12	0,06	0,74	500
	0,36	0,03	0,02	350
	0,02	0,8	0,1	300

7	0,05	0,17	0,04	570
	0,26	0,03	0,5	400
	0,31	0,4	0,19	370
8	0,24	0,56	0,67	600
	0,2	0,11	0,15	450
	0,38	0,04	0,09	400
9	0,4	0,06	0,2	700
	0,05	0,42	0,4	470
	0,27	0,31	0,16	430
10	0,54	0,01	0,21	480
	0,21	0,38	0,04	400
	0,03	0,5	0,09	350
11	0,12	0,05	0,07	790
	0,18	0,21	0,36	650
	0,31	0,3	0,41	470
12	0,25	0,71	0,49	560
	0,26	0,08	0,21	400
	0,3	0,05	0,05	350
13	0,47	0,39	0,13	700
	0,1	0,02	0,36	677
	0,06	0,22	0,38	400
14	0,05	0,61	0,02	700
	0,6	0,2	0,04	470
	0,03	0,03	0,44	600
15	0,42	0,01	0,37	710
	0,01	0,53	0,07	670
	0,08	0,09	0,02	500
16	0,04	0,24	0,04	1000
	0,61	0,06	0,5	710
	0,3	0,51	0,21	560
17	0,02	0,02	0,38	1100
	0,03	0,6	0,21	800
	0,9	0,21	0,08	640
18	0,11	0,81	0,81	110
	0,12	0,04	0,02	90
	0,5	0,01	0,06	89

19	0,06	0,5	0,09	115
	0,31	0,03	0,38	90
	0,38	0,12	0,11	100
20	0,39	0,25	0,25	560
	0,06	0,22	0,51	410
	0,44	0,09	0,06	350
21	0,5	0,02	0,74	720
	0,06	0,09	0,09	500
	0,08	0,47	0,02	420
22	0,24	0,23	0,55	790
	0,29	0,35	0,05	550
	0,03	0,01	0,06	440
23	0,09	0,22	0,5	760
	0,27	0,6	0,07	450
	0,5	0,04	0,16	430
24	0,06	0,05	0,66	500
	0,24	0,36	0,01	350
	0,2	0,24	0,05	310
25	0,7	0,09	0,21	800
	0,09	0,11	0,12	600
	0,1	0,5	0,4	470
26	0,01	0,14	0,01	480
	0,45	0,63	0,56	450
	0,06	0,01	0,04	260
27	0,8	0,25	0,39	560
	0,01	0,29	0,31	410
	0,03	0,04	0,02	400
28	0,57	0,09	0,06	780
	0,01	0,36	0,04	500
	0,1	0,31	0,8	350
29	0,58	0,25	0,01	400
	0,06	0,29	0,09	230
	0,11	0,07	0,54	250
30	0,44	0,08	0,01	420
	0,23	0,62	0,8	350
	0,08	0,19	0,02	320

Приклади розв'язання завдання 4.

Матрична модель структурного балансу фірм, що випускають високотехнологічні товари, зокрема, комп'ютери, має вигляд

$$(E - A)X=Y,$$

де X – невідомий вектор випуску, Y – вектор попиту (вектор кінцевого продукту), A – *структурна матриця випуску*, E – одинична матриця відповідного розміру. Треба за допомогою поняття оберненої матриці знайти вектор випуску [6].

Нехай матриці A та Y мають вигляд:

0.1	0.16	0.5	100
0.5	0.1	0.4	100
0.2	0.26	0.3	110

Щоб знайти вектор X, зробимо перетворення

$$\left(E-A\right)X=Y \Leftrightarrow X=\left(E-A\right)^{-1}Y.$$

Конкретні обчислення зробимо, використовуючи MathCAD:

$$Y := \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 110 \end{pmatrix} \qquad A := \begin{pmatrix} 0.1 & 0.16 & 0.5 \\ 0.5 & 0.1 & 0.4 \\ 0.2 & 0.26 & 0.3 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X := (E-A)^{-1} \cdot Y \qquad X = \begin{pmatrix} 534.215 \\ 653.446 \\ 552.484 \end{pmatrix}$$

Функції однієї та багатьох змінних. Інтеграли

Завдання І. *(Рекомендується при розв'язанні застосувати математичний пакет прикладних програм Mathcad* [6]*).*

Обчислити за допомогою подвійного інтеграла у полярних координатах площу фігури, обмеженої кривою $F(x,y)=0$, що задана у декартових координатах наведених нижче у таблиці варіантів.

№ варіанту	$F(x,y)$
1	$\left(x^2+y^2\right)^5=x^4y^2$
2	$\left(x^2+y^2\right)^5=x^3y$
3	$\left(x^2+y^2\right)^7=x^2y^4$
4	$\left(x^2+y^2\right)^2=\left(x^2+2y^2\right)$
5	$\left(x^2+y^2\right)^5=y^4$
6	$\left(x^2+y^2\right)^2=2x$
7	$\left(x^2+y^2\right)^2=\left(5x^2+7y^2\right)$
8	$\left(x^2+y^2\right)^3=\left(x^4+y^4\right)$
9	$\left(x^2+y^2\right)^2=\left(x^2-y^2\right)$
10	$\left(x^2+y^6\right)^2=xy$
11	$\left(x^2+y^2\right)^5=xy^3$
12	$\left(x^2+y^2\right)^3=y^2$
13	$\left(x^2+y^2\right)^3=x^2$
14	$\left(x^2+y^2\right)^2=\left(2x^2+y^2\right)$
15	$\left(x^2+y^2\right)^7=x^4y^2$
16	$\left(x^2+y^2\right)^5=x^3y$
17	$\left(x^2+y^2\right)^3=x^2y^2$

18	$\left(x^2+y^2\right)^2=\left(3x^2+2y^2\right)$
19	$\left(x^2+y^2\right)^5=y^3$
20	$\left(x^2+y^2\right)^3=x^4$
21	$\left(x^2+y^2\right)^2=\left(4x^2+y^2\right)$
22	$x^4=\left(3x^2-y^2\right)$
23	$x^6=\left(x^2-y^2\right)\left(x^2+y^2\right)$
24	$x^4=\left(x^2-3y^2\right)$
25	$\left(x^6+y^2\right)^2=\left(4x^2+5y^2\right)$
26	$\left(x^2+y^2\right)^3=x^2\left(4x^2+3y^2\right)$
27	$\left(x^2+y^2\right)^3=\left(x^4+y^4\right)$
28	$\left(x^2+y^2\right)=\left(2x^2+3y^2\right)$
29	$\left(x^2+y^2\right)^2=\left(x^2+4y^2\right)$
30	$\left(x^2+y^2\right)^2=\left(5x^2+4y^2\right)$

Приклад розв'язання завдання I із застосуванням математичного пакету прикладних програм Mathcad.

Обчислити за допомогою подвійного інтеграла у полярних координатах площу фігури, обмеженої кривою $F(x,y)=0$, що задана у декартових координатах .

Маємо рівняння кривої у декартових координатах

$$f(x,y) := (x^2+y^2)^3 - x\cdot y^3$$

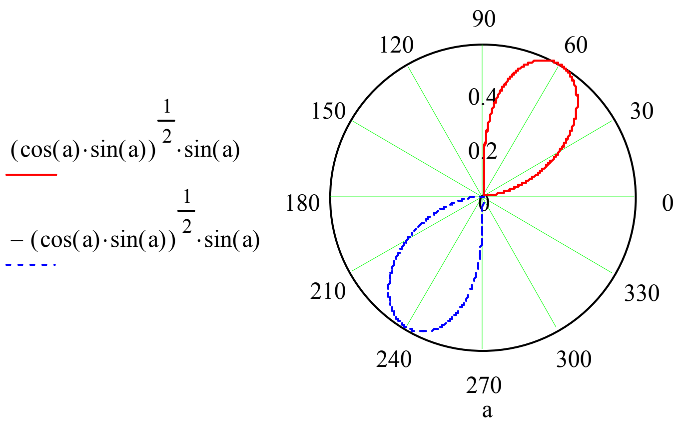
Переходимо до полярних координат

$$f1(r,a) := f(x,y)\left|\begin{matrix} substiture, & x=r\cdot\cos(a) \\ substiture, & y=r\cdot\sin(a)\end{matrix}\right. \to (r^2\cdot\cos(a)^2+r^2\cdot\sin(a)^2)^3 - r^4\cdot\cos(a)\cdot\sin(a)^3$$

Роз’язуємо рівняння відносно r

$$f1(r,a)\quad solve,r \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ (\cos(a)\cdot\sin(a))^{\frac{1}{2}}\cdot\sin(a) \\ -(\cos(a)\cdot\sin(a))^{\frac{1}{2}}\cdot\sin(a) \end{bmatrix}$$

Будуємо графік кривої у полярних координатах і по ньому визначаємо границі інтегрування



Обчислюємо за допомогою інтегрування площу верхньої частини

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{(\cos(a)\cdot\sin(a))^{\frac{1}{2}}\cdot\sin(a)} r\,dr\,da \rightarrow \frac{1}{8} \text{ або } \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{(\cos(a)\cdot\sin(a))^{\frac{1}{2}}\cdot\sin(a)} r\,dr\,da = 0.125$$

Загальна площа дорівнює

$$S := \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{(\cos(a)\cdot\sin(a))^{\frac{1}{2}}\cdot\sin(a)} r\,dr\,da \text{ або } S = 0.25$$

Завдання II

Знайти момент інерції однорідного циліндра з висотою *N* і радіусом основи *N/2* відносно діаметра основи (*N* – непарне) або відносно осі циліндра (*N* – парне). *N* – номер варіанта [6].

Приклад розв'язання завдання II із застосуванням математичного пакету прикладних програм Mathcad.

1) Обчислення моменту інерції однорідного кругового циліндра радіуса R і висоти H відносно його осі

Момент інерції об'ємного тіла дорівнює потрійному інтегралу від квадрата відстані до осі

$$J = \iiint\limits_V r^2 dv,$$

або у циліндричних координатах

$$J = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^H dz \int_0^R r^2 r dr.$$

Обчислюємо внутрішній інтеграл

$$\int_0^R r^3 dr = \frac{r^4}{4}\bigg|_0^R = \frac{R^4}{4},$$

далі

$$\frac{R^4}{4}\int_0^H dz = \frac{R^4}{4} z\bigg|_0^H = \frac{R^4 H}{4},$$

остаточно маємо

$$\frac{R^4 H}{4}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{R^4 H}{4}\varphi\bigg|_0^{2\pi} = \frac{2\pi R^4 H}{4} = \frac{\pi R^4 H}{2}.$$

2) Обчислення моменту інерції однорідного кругового циліндра радіуса R і висоти H відносно діаметру його основи

Момент інерції об’ємного тіла дорівнює потрійному інтегралу від квадрата відстані до осі

$$J=\iiint_V r^2 dv,$$

будемо вважати, що діаметр співпадає з віссю Y, тоді

$$J=\iiint_V (x^2+z^2)dv,$$

або у циліндричних координатах

$$J=\iiint_V ((r\cos\varphi)^2+z^2)rdrd\varphi dz=\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^H dz\int_0^R ((r\cos\varphi)^2+z^2)rdr.$$

Обчислення виконаємо за допомогою MathCAD:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^H\int_0^R \left[(r\cdot\cos(\phi))^2+z^2\right]\cdot r\,dr\,dz\,d\phi \to \frac{1}{4}\cdot\pi\cdot R^4\cdot H+\frac{1}{3}\cdot H^3\cdot R^2\cdot\pi$$

Завдання III

1) Розкласти довільну функцію $y=f(x)$ у степеневий ряд, користуючись формулами розкладання у степеневий ряд елементарних функцій. Визначити інтервал збіжності ряду.

2) Знайти з точністю до 0,001 наближене значення функції $g(x_0)$, користуючись її розкладанням у степеневий ряд.

Варіанти завдань:

	Завдання 1	Завдання 2
№	$y=f(x)$	$g(x_0)$
1	$x\cos x$	$\sqrt[5]{37}$
2	$x^2\sin x$	$\sin 3^0$
3	$\frac{1}{\sqrt{x}}\sin x$	e^{-1}
4	$\ln\sqrt{x^2+1}$	$\sqrt[3]{60}$
5	$\sqrt{x}\cos x$	$\sqrt{e}$
6	$\sqrt{x}e^x$	$\cos 6^0$
7	x^2e^{-x}	$\sqrt[10]{1025}$

8	$xe^{\sqrt{x}}$	$\sin 24^0$
9	$x\cos x+\sin x$	e^{-2}
10	$(1-x^2)\sin x^2$	$\sqrt[3]{7}$
11	$x\cos^2 x$	$\sqrt[3]{e}$
12	$\ln(x+2)$	$\sin 12^0$
13	$e^{-x}+e^{x}$	$\sqrt[3]{28}$
14	$\dfrac{x\cos x+\sin x}{x^3}$	$\cos 3^0$
15	$\ln(x^2-5x+6)$	$e^{1/2}$
16	$x\sin x$	$\sqrt[5]{33}$
17	$\dfrac{\sin x}{x}$	$\sin 18^0$
18	$\dfrac{\cos x}{x^3}$	e^2
19	2^{x^2}	$\sqrt[3]{124}$
20	$\sqrt{x^3}e^x$	$\sin 15^0$
21	$\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$	$\sqrt[5]{e}$
22	$\sqrt{x}\sin x$	$\sqrt[3]{30}$
23	$\sqrt[4]{1+x^2}$	$\cos 18^0$
24	$e^{-x^2}+e^{x^2}$	$\sin 9^0$
25	$\dfrac{\cos x}{x^2}$	$\sqrt[6]{63}$
26	$x\cos x+x^2\sin x$	$\sqrt[4]{e}$
27	$\ln(x+4)$	$\sin 6^0$
28	$x\sin x^2$	$\sqrt[4]{e^3}$
29	$\sqrt[4]{1+x^3}$	$\sqrt[10]{1023}$
30	$e^{-x^3}+e^{x^3}$	$\cos 21^0$

Приклади розв'язання завдання III.

1) Розкласти в степеневий ряд функцію $x^3e^{x^2}$ і визначити інтервал її збіжності. Використовуючи формулу (1) з таблиці розкладу в степеневі ряди основних елементарних функцій і підставляючи x^2 замість x, отримаємо

$$e^{x^2} = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{n!} + \ldots \ .$$

Помноживши праву і ліву частини на x^3, отримаємо:

$$x^3e^{x^2} = x^3 + \frac{x^5}{1!} + \frac{x^7}{2!} + \ldots + \frac{x^{2n+3}}{n!} + \ldots \ .$$

Інтервал збіжності визначимо за ознакою Даламбера:

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x^{2n+3}}{(n+1)!}\dfrac{n!}{x^{2n+3}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}x^2 = 0 < 1$ – ця нерівність виконується при будь-якому x, тобто інтервал збіжності $(-\infty,+\infty)$.

2) З точністю до 0,001 обчислити значення радикала $\sqrt{17}$.

Перетворимо вираз $\sqrt{17}$ до вигляду:

$$\sqrt{17} = \sqrt{16+1} = \sqrt{16\left(1+\frac{1}{16}\right)} = \sqrt{4^2\left(1+\frac{1}{16}\right)} = 4\left(1+\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Далі скористаємося біноміальним рядом (4) з таблиці розкладу для $m = \dfrac{1}{2},\ x = \dfrac{1}{16}$:

$$\left(1+\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{16} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{1}{16}\right)^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\left(\frac{1}{16}\right)^3 + \ldots =$$

$$= 1 + \frac{1}{2\cdot 16} - \frac{1}{2^3\cdot 16^2} + \frac{1}{2^4\cdot 16^3} - \frac{5}{2^7\cdot 16^4} + \ldots = 1 + 0{,}0312 - 0{,}0004 + 0{,}00001 + \ldots$$

Одержаний ряд, починаючи з другого члена, знакозмінний і задовольняє ознаку Лейбніца, тому похибка при обчисленні його суми не більша від першого відкинутого члена.

Четвертий член розкладу, помножений на 4, задовольняє нерівність $0{,}0004 < 0{,}001$, а тому обчислення проводимо, утримуючи три члени ряду:

$$\sqrt{17} = 4(1 + 0{,}0312 - 0{,}0004) = 4 \cdot 1{,}0308 = 4{,}1232 \approx 4{,}123.$$

3) З точністю до 0,0001 обчислити $\sin 3^0$.

Переведемо аргумент функції з градусної міри до радіанної. Так як 180^0 відповідають π радіан, то з пропорції

$$\begin{array}{ccc} 180^0 & - & \pi \\ 3^0 & - & x \end{array}$$

знаходимо $x = \dfrac{3^0 \cdot \pi}{180^0} = \dfrac{1}{60}$. Підставляємо цей аргумент у ряд (2) з таблиці розкладу і знаходимо

$$\sin 3^0 = \sin\frac{\pi}{60} = \frac{\pi}{60} - \frac{\pi^3}{60^3 \cdot 3!} + \frac{\pi^5}{60^5 \cdot 5!} - \frac{\pi^7}{60^7 \cdot 7!} + \ldots = 0{,}0523333 - 0{,}0000238 + \ldots = 0{,}0523.$$

Одержаний ряд знакозмінний і задовольняє ознаку Лейбніца, тому похибка при обчисленні його суми не більша від першого відкинутого члена.

Вже другий член розкладу задовольняє нерівність $0{,}0000238 < 0{,}0001$, а тому обчислення проводимо, утримуючи один член ряду.

4) З точністю до 0,001 обчислити $\sqrt[3]{e}$.

Скористаємося рядом (1) з таблиці розкладу, поклавши $x = \dfrac{1}{3}$:

$$\sqrt[3]{e} = e^{0,3333} = 1 + \frac{0{,}3333}{1!} + \frac{0{,}3333^2}{2!} + \frac{0{,}3333^3}{3!} + \frac{0{,}3333^4}{4!} + \ldots =$$
$$= 1 + 0{,}3333 + 0{,}0555 + 0{,}0062 + 0{,}0005 \approx 1{,}3956.$$

Звичайні диференціальні рівняння

Завдання I

Розв'язати рівняння у повних диференціалах

1. $(3x^2y+2)dx+(x^3+3y^2)dy=0.$
2. $(3x^2+y^2)dx+2xydy=0$.
3. $(4x^3y+\sin x)dx+(x^4-\cos y)dy=0$.
4. $(3x^2y+\sin x)dx+(x^3-\cos y)dy=0$.
5. $\left(\frac{1}{1+x^2}+3x^2e^y\right)dx+(x^3e^y+1)dy=0.$
6. $(3x^2y-5)dx+(x^3+y)dy=0$.
7. $(3x^2+2y^2)dx+(4yx-\sin 2y)dy=0$.
8. $(x^2+y^2)dx+2xydy=0$.
9. $(y+\cos x)dx+xdy=0$.
10. $2xydx+(x^2-5y^2)dy=0$.
11. $(\ln y+\sin x)dx+(\frac{x}{y}-\cos y)dy=0$.
12. $(x^3-2y^2)dx-4xydy=0$.
13. $(x+y^2)dx+2xydy=0.$
14. $(1-xy)dx-xdy=0$.
15. $y\ln 3dx+(x\ln 3-3)dy=0$.
16. $(y+\ln x)dx+xdy=0$.
17. $(3x^2y+\cos x)dx+(x^3-\sin y)dy=0$.
18. $(y+\ln x)dx+xdy=0$.
19. $(y+\ln x)dx+(x-y^2)dy=0$.
20. $(\ln y+2x-1)dy=2ydx.$

21. $2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0$.

22. $\left(x^2 + \sin^2 y\right)dx + x\sin 2ydy = 0$.

23. $\left(y + \ln x\right)dx + xdy = 0$.

24. $\left(x^2 + y^2\right)dx + 2xydy = 0$.

25. $2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0$.

26. $(2xy + 3y^2)dx + (x^2 + 6xy - 3y^2)dy = 0$.

27. $(x + \sin y)dx + (x\cos y + \sin y)dy = 0$.

28. $(\sin x + y^2)dx + 2xydy = 0$.

29. $(3x^2 y + \sin x)dx + (x^3 - \cos y)dy = 0$.

30. $3x^2(1 + \ln y)dx = \left(2y + \dfrac{x^3}{y}\right)dy$.

Приклад розв'язання завдання 1.

Розв'язати рівняння у повних диференціалах

$$(2xy + 3y^2)dx + (x^2 + 6xy - 3y^2)dy = 0.$$

Маємо

$$M(x, y) = 2xy + 3y^2,\ \ N(x, y) = x^2 + 6xy - 3y^2;$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x + 6y,\ \ \frac{\partial N}{\partial x} = 2x + 6y.$$

Отже, $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$, тобто ліва частина даного рівняння є повним диференціалом деякої функції $U(x, y)$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2xy + 3y^2,\ \ \frac{\partial U}{\partial y} = x^2 + 6xy - 3y^2.$$

З першого рівняння знаходимо

$$U(x, y) = x^2 y + 3xy^2 + \phi(y).$$

Останню рівність диференціюємо по y

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x^2 + 6xy + \frac{d\phi}{dy} = x^2 + 6xy - 3y^2,$$

тобто $\frac{d\phi}{dy} = -3y^2$. Звідси

$$d\phi = -3y^2 dy,\ \ \phi(y) = -y^3 + C_1.$$

Тому

$$U(x,y) = x^2 y + 3xy^2 - y^3 + C_1.$$

Остаточно

$$x^2 y + 3xy^2 - y^3 = C.$$

Завдання II

Розв'язати задачу Коші для лінійного однорідного рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами $y'' + py' + qy = f(x),\ y(0) = a,\ y'(0) = b.$

№ варіанту	p	q	f(x)	a	b
1	2	0	$4e^x(\sin x + \cos x)$	1	0
2	-4	4	$-\sin 2x$	0	2
3	2	0	$e^{-2x}\cos x$	6	1
4	0	1	$e^x(\sin x + \cos x)$	-1	3
5	2	5	$4e^{2x}\sin x$	3	4
6	-4	4	$-\sin x + 5\cos x$	0	0
7	6	13	$10e^x(\sin x + \cos x)$	0	0
8	0	1	$e^{-x}\cos 2x$	-2	1
9	2	5	$-2\sin x$	-1	-2
10	-4	8	$e^{-x}\sin 2x$	2	7
11	2	0	$4e^x(\sin x + \cos x)$	1	0
12	-4	4	$-\sin 2x$	0	2
13	2	0	$e^{-2x}\cos x$	6	1
14	0	1	$e^x(\sin x + \cos x)$	-1	3
15	2	5	$4e^{2x}\sin x$	3	4
16	-4	4	$-\sin x + 5\cos x$	0	0
17	6	13	$10e^x(\sin x + \cos x)$	0	0
18	0	1	$e^{-x}\cos 2x$	-2	1
19	2	5	$-2\sin x$	-1	-2

20	-4	8	$e^{-x}\sin 2x$	2	7
21	2	0	$4e^{x}(\sin x+\cos x)$	1	0
22	-4	4	$-\sin 2x$	0	2
23	2	0	$e^{-2x}\cos x$	6	1
24	0	1	$e^{x}(\sin x+\cos x)$	-1	3
25	2	5	$4e^{2x}\sin x$	3	4
26	-4	4	$-\sin x+5\cos x$	0	0
27	6	13	$10e^{x}(\sin x+\cos x)$	0	0
28	0	1	$e^{-x}\cos 2x$	-2	1
29	2	5	$-2\sin x$	-1	-2
30	-4	8	$e^{-x}\sin 2x$	2	7

Приклади розв'язання завдання 2.

Знайти загальні розв'язки лінійних неоднорідних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами

а) $y''-\frac{1}{2}y'-\frac{1}{2}y=3e^{\frac{1}{2}x}$;

б) $y''-3y'+2y=x^2+3x$;

в) $y''-3y'=x^2+3x$;

г) $y''+y=10e^{x}\sin 2x$;

д) $y''+y=4x\sin x.$

а) Розв'яжемо відповідне однорідне рівняння $y''-\frac{1}{2}y'-\frac{1}{2}y=0.$

Характеристичне рівняння $\lambda^2-\frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{2}=0$ має корені $\lambda_1=1,\quad \lambda_2=-\frac{1}{2},$ тому загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд $\bar{y}=C_1e^{x}+C_2e^{-\frac{1}{2}x}$.

Необхідно знайти частинний розв'язок неоднорідного рівняння. Права частина останнього має вигляд $P(x)e^{kx}=3e^{\frac{1}{2}x}$, тобто $P(x)=3,$ а $k=\frac{1}{2}$ не є коренем характеристичного рівняння. Тоді частинний розв'язок має вигляд $y^*=Q(x)e^{kx}=Ae^{\frac{1}{2}x}$ ($Q(x)-$ многочлен того ж степеня, що й $P(x)$).

Підставимо y^* в початкове рівняння

$$\left(\frac{1}{4}A - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}A\right)e^{\frac{1}{2}x} = 3e^{\frac{1}{2x}}.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $e^{\frac{1}{2}x}$, отримуємо

$$-\frac{1}{2}A = 3, \;\; A = -6.$$

Тоді $y^* = -6e^{\frac{1}{2}x}$.

Загальний розв'язок нашого рівняння має вигляд

$$y = \overline{y} + y^* = C_1e^x + C_2e^{-\frac{1}{2}x} - 6e^{\frac{1}{2}x}.$$

б) Розв'яжемо відповідне однорідне рівняння $y'' - 3y' + 2y = 0.$

Характеристичне рівняння $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ має корені $\lambda_1 = 1,\; \lambda_2 = 2,$ тому загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд $\overline{y} = C_1e^x + C_2e^{2x}.$

Необхідно знайти частинний розв'язок неоднорідного рівняння. Права частина останнього має вигляд $P(x)e^{kx} = (x^2 + 3x)e^{0x}$, тобто $P(x) = x^2 + 3x,$ а $k = 0$ не є коренем характеристичного рівняння. Тоді частинний розв'язок має вигляд

$$y^* = Q(x)e^{kx} = Ax^2 + Bx + C.$$

Підставимо y^* в початкове рівняння

$$2Ax^2 + (2B - 6A)x + 2C - 3B + 2A = x^2 + 3x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, отримуємо систему

$$2A = 1, \;\; 2B - 6A = 3, \;\; 2C - 3B + 2A = 0,$$

з якої знаходимо

$$A = \frac{1}{2}, \;\; B = 3, \;\; C = 4.$$

Тоді $y^* = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 4.$

Загальний розв'язок нашого рівняння має вигляд

$$y = \overline{y} + y^* = C_1e^x + C_2e^{2x} + \frac{1}{2}x^2 + 3x + 4.$$

в) Розв'яжемо відповідне однорідне рівняння $y'' - 3y' = 0.$

Характеристичне рівняння $\lambda^2 - 3\lambda = 0$ має корені $\lambda_1 = 3,\ \ \lambda_2 = 0,$ тому загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд $\bar{y} = C_1 e^{3x} + C_2$.

Необхідно знайти частинний розв'язок неоднорідного рівняння. Права частина останнього має вигляд $P(x)e^{kx} = (x^2 + 3x)e^{0x}$, тобто $P(x) = x^2 + 3x,$ а $k = 0$ є коренем характеристичного рівняння. Тоді частинний розв'язок має вигляд

$$y^* = x^r Q(x)e^{kx} = x(Ax^2 + Bx + C), \text{ де } r - \text{ кратність } k.$$

Підставимо y^* в початкове рівняння та прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x. Отримаємо систему

$$-9A = 1,\ \ -6B + 6A = 3,\ \ -3C + 2B = 0,$$

з якої знаходимо

$$A = -\frac{1}{9},\ \ B = -\frac{11}{18},\ \ C = -\frac{11}{27}.$$

Тоді $y^* = -\dfrac{1}{9}x^3 - \dfrac{11}{18}x^2 - \dfrac{11}{27}x.$

Загальний розв'язок нашого рівняння має вигляд

$$y = \bar{y} + y^* = C_1 e^{3x} + C_2 - \frac{1}{9}x^3 - \frac{11}{18}x^2 - \frac{11}{27}x.$$

г) Розв'яжемо відповідне однорідне рівняння $y'' + y = 0.$

Характеристичне рівняння $\lambda^2 + 1 = 0$ має корені $\lambda_{1в2} = \pm i$, тому загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд $\bar{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

Необхідно знайти частинний розв'язок неоднорідного рівняння. Права частина останнього має вигляд $e^{\alpha x}(P_1(x)\cos\beta x + P_2(x)\sin\beta x) = e^x \cdot 10\sin 2x,$ тобто $P_1(x) = 0,\ P_2(x) = 10,\ \alpha = 1,\ \ \beta = 2$. Комплексні числа $\alpha \pm \beta i = 1 \pm 2i$ не є коренями характеристичного рівняння. Тому частинний розв'язок має вигляд

$$y^* = e^x(A\cos 2x + B\sin 2x).$$

Підставимо y^* в початкове рівняння

$$[(-2A + 4B)\cos 2x + (-4A - 2B)\sin 2x]e^x = 10e^x \sin 2x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x отримаємо систему

$$-2A+4B=0,\ \ -4A-2B=10.$$

З неї знаходимо

$$A=-2,\ \ B=-1.$$

Тоді $y^{*}=-e^{x}(2\cos 2x+\sin 2x).$

Загальний розв'язок нашого рівняння має вигляд

$$y=\bar{y}+y^{*}=C_1\cos x+C_2\sin x-e^{x}(2\cos 2x+\sin 2x).$$

д) Розв'яжемо відповідне однорідне рівняння $y''+y=0.$

Характеристичне рівняння $\lambda^2+1=0$ має корені $\lambda_{1б2}=\pm i$, тому загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд $\bar{y}=C_1\cos x+C_2\sin x$.

Необхідно знайти частинний розв'язок неоднорідного рівняння. Права частина останнього має вигляд $e^{\alpha x}(P_1(x)\cos\beta x+P_2(x)\sin\beta x)=4x\sin x,$ тобто $P_1(x)=0,\ P_2(x)=4x,\ \alpha=0,\ \ \beta=1$. Комплексні числа $\alpha\pm\beta i=\pm i$ є коренями характеристичного рівняння. Тому частинний розв'язок має вигляд

$$y^{*}=x[(A_1x+B_1)\cos x+(A_2x+B_2)\sin x]=(A_1x^2+B_1x)\cos x+(A_2x^2+B_2x)\sin x.$$

Підставимо y^{*} в початкове рівняння

$$[4A_2x+(2B_2+2A_1)]\cos x+[-4A_1x+(-2B_1+2A_2)]\sin x=4x\sin x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x отримаємо систему

$$4A_2=0,\ \ 2A_1+2B_2=0,\ \ -4A_1=4,\ \ 2A_2-2B_1=0.$$

З неї знаходимо

$$A_1=-1,\ \ B_1=0,\ \ A_2=0,\ \ B_2=1.$$

Тоді $y^{*}=-x^2\cos x+x\sin x.$

Загальний розв'язок нашого рівняння має вигляд

$$y=\bar{y}+y^{*}=C_1\cos x+C_2\sin x+x(-x\cos x+\sin x).$$

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ СТУДЕНТІВ

1. Дати означення матриці та її розміру. Які існують різновиди матриць?
2. Які елементи утворюють головну та побічну діагоналі матриці?
3. За якими правилами матрицю домножають на дійсне число, знаходять алгебраїчну суму матриць, добуток матриць?
4. Чи завжди добуток матриць має властивість комутативності?
5. За якими правилами обчислюють визначники 2-го, 3-го, та n-го порядків?
6. Як визначають і знаходять мінор та алгебраїчне доповнення елемента aij матриці А?
7. Сформулюйте властивості визначника.
8. Як визначають та позначають матрицю обернену до матриці А?
9. При яких умовах існує обернена матриця?
10. Які ви знаєте способи знаходження оберненої матриці?
11. Які величини називають сталими, а які змінними?
12. Назвіть способи задання функцій.
13. Що таке область визначення та область значень функції?
14. Побудуйте ескізи графіків основних елементарних функцій.
15. Який існує зв'язок між нескінченно малою та нескінченно великою величинами?
16. Дати означення границі послідовності та границі функції.
17. Яка геометрична інтерпретація означення границі послідовності?
18. Назвіть деякі методи розкриття невизначеностей типу $\left[\frac{0}{0}\right]$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, $\left[\infty-\infty\right]$ для алгебраїчних функцій.
19. Наведіть першу та другу особливі границі. Які їх наслідки?
20. Як визначають число e? Де його застосовують?

21. Поясніть, що таке приріст аргументу та функції.
22. Дайте визначення неперервності функції в точці і на відрізку.
23. Які існують розриви функцій?
24. Чим відрізняється ліквідовний розрив від неліквідовного?
25. Який геометричний, механічний, економічний зміст має похідна функції?
26. Дати визначення похідної функції.
27. Які існують правила знаходження похідної функції?
28. Як знайти похідну складної функції?
29. Як знайти похідну другого, третього та вищих порядків?
30. Що таке диференціал функції?
31. Сформулюйте правило Лопіталя.
32. Як знайти найбільше та найменше значення функції на відрізку?
33. Як визначити інтервали монотонності функції?
34. Як знайти максимум і мінімум функції?
35. Які необхідні та достатні умови існування екстремуму функції?
36. Назвіть необхідні та достатні умови існування точки перегину функції?
37. Які ознаки опуклості та ввігнутості кривої?
38. Яка пряма називається асимптотою кривої?
39. Наведіть загальну схему дослідження функції та побудови її графіка.
40. Дати означення вектора. Чим відрізняються векторні величини від скалярних?
41. Які вектори називаються рівними, колінеарними, протилежними, компланарними?
42. Що таке орт?
43. Як записати розклад вектора за ортами (базисом) прямокутної декартової системи координат?
44. Як знайти суму та різницю двох векторів?
45. Як знайти проекцію вектора на вісь, кут між вектором і віссю?

46. Як визначити координати вектора, якщо відомі координати початку та кінця вектору?
47. Наведіть правила знаходження алгебраїчної суми векторів і множення вектора на число, якщо відомі координати векторів. Як знайти тема вектора?
48. Дати визначення скалярного добутку векторів.
49. Чому дорівнює скалярний добуток векторів $\bar{a} \cdot \bar{b}$, якщо:

    а) $\bar{a}$ та $\bar{b}$ колінеарні та однаково напрямлені;

    б) $\bar{a}$ та $\bar{b}$ протилежні;

    в) $\bar{a}$ та $\bar{b}$ перпендикулярні;

    г) $\bar{a}$ та $\bar{b}$ рівні?
50. Як знайти відстань між двома точками із заданими координатами?
51. Як знайти координати середини відрізка, коли відомі координати початку та кінця відрізку?
52. Які є види рівнянь на площині?
53. Запишіть

    а) загальне рівняння прямої;

    б) канонічне рівняння прямої;

    в) рівняння прямої у відрізках;

    г) рівняння прямої, що походить через дві задані точки;

    д) рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

    Наведіть умови паралельності та перпендикулярності прямих.
54. Чи можна від одного вигляду рівняння прямої перейти до іншого? Покажіть це на прикладі переходу від загального рівняння прямої до рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.
55. Як знайти кут між двома прямими та відстань від заданої точки до прямої?
56. Запишіть загальне рівняння площини у просторі.

57. Наведіть канонічні та параметричні рівняння прямої у просторі.
58. Запишіть рівняння прямої у просторі, що проходить через дві задані точки.
59. Як знайти відстань від точки до площини, заданої загальним рівнянням?
60. Які лінії називають кривими другого порядку?
61. Запишіть канонічні рівняння

    а) кола;

    б) еліпса;

    в) гіперболи;

    г) параболи.
62. Дайте визначення первісної та невизначеного інтеграла.
63. Як пов'язані операції інтегрування та диференціювання функції?
64. Назвіть основні властивості невизначеного інтеграла.
65. Наведіть таблицю основних інтегралів.
66. Які існують методи інтегрування?
67. Запишіть формулу інтегрування по частинах. Як вона отримана?
68. Поясніть як інтегрувати раціональний дріб.
69. Як правильний дріб представити у вигляді суми найпростіших дробів?
70. Які задачі призводять до поняття визначеного інтеграла? Дати означення визначеного інтеграла.
71. Який зв'язок між визначеним і невизначеним інтегралами?
72. Наведіть основну формулу інтегрального числення (формулу Ньютона-Лейбніца).
73. Назвіть основні властивості визначеного інтегралу.
74. Запишіть формулу інтегрування по частинах для визначеного інтеграла.
75. Чим відрізняється метод заміни змінної для визначеного інтеграла від цього ж методу для невизначеного інтеграла?
76. Наведіть приклади геометричних та економічних застосувань визначеного інтеграла.

77. Які інтеграли називають невласними?
78. Чим відрізняються невласні інтеграли I роду від невласних інтегралів II роду? Як їх обчислювати?
79. Дайте визначення звичайного диференціального рівняння.
80. Як визначити порядок диференціального рівняння?
81. Дайте означення загального та частинного розв'язків диференціального рівняння.
82. Поясніть що таке задача Коші.
83. Як знаходити розв'язки диференціальних рівнянь з відокремленими та відокремлюваними змінними?
84. Які диференціальні рівняння називають лінійними?
85. Знайти загальний розв'язок

    а) лінійного однорідного рівняння, тобто $y' + p(x)y = 0$;

    б) лінійного неоднорідного рівняння, тобто $y' + p(x)y = f(x)$.

ПЕРЕЛІК ПИТАНЬ ДО ЗАЛІКУ

1. Матриці. Дії над матрицями.
2. Транспонування матриці. Обернена матриця.
3. Обчислення оберненої матриці.
4. Визначники. Обчислення визначників другого та третього порядку.
5. Властивості визначників та їх обчислення.
6. Метод Крамера розв’язання систем лінійних рівнянь.
7. Метод Гауса розв’язання систем лінійних рівнянь.
8. Матричний метод розв’язання систем лінійних рівнянь.
9. Вектори та їх властивості.
10. Добутки векторів.
11. Базис і розмірність лінійного простору.
12. Координати вектора у заданому базисі.
13. Дослідження лінійної залежності.
14. Ранг матриці.
15. Мінори й алгебраїчні доповнення.
16. Рівняння прямої на площині.
17. Рівняння прямої у просторі.
18. Рівняння площини.
19. Криві другого порядку.
20. Поняття функціональної залежності.
21. Основні види функцій. Властивості функцій.
22. Основні логічні операції та їх застосування.
23. Числова послідовність.

24. Обмежені та монотонні послідовності.
25. Границя послідовності.
26. Границя функції.
27. Властивості границь.
28. Перша чудова границя.
29. Друга чудова границя.
30. Нескінченно малі та нескінченно великі величини.
31. Правило Лопіталя.
32. Неперервність функцій.
33. Основні теореми про неперервність функції.
34. Класифікація розривів функцій.
35. Похідна функції.
36. Геометрична та механічна інтерпретація похідної.
37. Обчислення похідної.
38. Диференціал.
39. Похідні та диференціали вищих порядків.
40. Дослідження функцій та побудова їх графіків.
41. Функції однієї змінної. Основні елементарні функції та їх графіки.
42. Рівняння дотичної до графіка функції в заданій точці.
43. Асимптоти функції: горизонтальні, вертикальні та похилі.
44. Графіки функцій двох змінних.
45. Локальні екстремуми.
46. Частинні похідні.
47. Повний диференціал.
48. Наближене обчислення функції за допомогою диференціала.

49. Метод найменших квадратів.
50. Функції кількох змінних.
51. Поняття первісної та невизначеного інтеграла.
52. Невизначений інтеграл та його властивості.
53. Метод безпосереднього інтегрування.
54. Метод заміни змінної.
55. Метод інтегрування частинами для невизначеного інтеграла.
56. Інтегрування раціональних дробів.
57. Інтегрування тригонометричних функцій.
58. Інтегрування ірраціональних функцій.
59. Визначений інтеграл та його властивості.
60. Обчислення визначеного інтеграла.
61. Теорема Ньютона-Лейбніца.
62. Метод заміни змінної у визначеному інтегралі.
63. Метод інтегрування частинами для визначеного інтеграла.
64. Обчислення площ плоских фігур за допомогою визначеного інтеграла.
65. Обчислення об'ємів тіл обертання за допомогою визначеного інтеграла.
66. Застосування визначеного інтеграла.
67. Інтеграли, які залежать від параметрів.
68. Невласні інтеграли та їх обчислення.
69. Повторні інтеграли.
70. Подвійний інтеграл та його властивості.
71. Подвійний інтеграл як об'єм циліндричного бруса.
72. Теорема про представлення подвійного інтеграла через повторний.
73. Диференціальні рівняння 1-го порядку, їх класифікація.

74. Диференціальні рівняння з відокремленими та відокремлювальними змінними.
75. Однорідні диференціальні рівняння 1- го порядку.
76. Лінійні диференціальні рівняння 1-го порядку. Метод Бернуллі.
77. Рівняння у повних диференціалах.
78. Задачі, що приводять до звичайних диференціальних рівнянь.
79. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку, їх класифікація.
80. Диференціальні рівняння другого порядку, які допускають зниження порядку.
81. Загальний та частинний розв'язки лінійного однорідного рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.
82. Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.
83. Однорідні диференціальні лінійні рівняння другого порядку
84. Диференціальні лінійні рівняння другого порядку зі спеціальною правою частиною.
85. Метод Лагранжа (варіації довільних сталих).
86. Теорема існування та єдиності розв'язку задачі Коші.
87. Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків зі сталими коефіцієнтами.
88. Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків, які допускають пониження порядку.
89. Нормальні системи диференціальних рівнянь.
90. Динамічні системи в економічних задачах.

ШКАЛА ОЦІНЮВАННЯ ЗНАНЬ

<table>
<tr><th>Рейтинговий показник</th><th colspan="2">Оцінка у національній шкалі</th><th>Оцінка ECTS</th></tr>
<tr><td>90-100</td><td rowspan="5">зараховано</td><td>5 (відмінно)</td><td>A (відмінно)</td></tr>
<tr><td>82-89</td><td rowspan="2">4 (добре)</td><td>B (добре)</td></tr>
<tr><td>75-81</td><td>C (добре)</td></tr>
<tr><td>68-74</td><td rowspan="2">3 (задовільно)</td><td>D (задовільно)</td></tr>
<tr><td>60-63</td><td>E (задовільно)</td></tr>
<tr><td>35-59</td><td rowspan="2">Не зараховано</td><td>2 (незадовільно)</td><td>FX (незадовільно)
з можливістю повторного складання</td></tr>
<tr><td>1-34</td><td>–</td><td>F (незадовільно)
з обов’язковим повторним вивченням</td></tr>
</table>

ДОДАТКИ

Додаток 1. Властивості логарифмів

1. Основна логарифмічна тотожність

$$a^{\log_a b} = b .$$

2. Логарифм основи дорівнює одиниці

$$\log_a a = 1 .$$

3. Логарифм одиниці дорівнює нулю

$$\log_a 1 = 0 .$$

4. Формула для логарифма добутку

$$\log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a |x_1| + \log_a |x_2| .$$

5. Формула для логарифма частки

$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a |x_1| - \log_a |x_2| .$$

6. Формула для логарифма степеня

$$\log_a x^n = n \log_a x .$$

7. $\log_{a^k} x = \dfrac{1}{k} \log_a x$.

8. $\log_{a^k} x^n = \dfrac{n}{k} \log_a x$.

9. $a^{\log_m b} = b^{\log_m a}$.

10. Формула переходу до нової основи

$$\log_a N = \frac{\log_c N}{\log_c a} .$$

Зокрема,

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} .$$

Додаток 2. Основні тригонометричні формули

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1 \qquad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad 1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \mp \beta) = \cos\alpha\cos\beta \pm \sin\alpha\sin\beta$$

$$tg(\alpha \pm \beta) = \frac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha \cdot tg\beta}$$

$$ctg(\alpha \pm \beta) = \frac{ctg\alpha \cdot ctg\beta \mp 1}{ctg\beta \pm ctg\alpha}$$

$$tg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

$$ctg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$$

$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

$$ctg 2\alpha = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha}$$

$$\sin\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1 + tg^2\frac{\alpha}{2}} \qquad \cos\alpha = \frac{1 - tg^2\frac{\alpha}{2}}{1 + tg^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$tg\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1 - tg^2\frac{\alpha}{2}} \qquad ctg\alpha = \frac{1 - tg^2\frac{\alpha}{2}}{2tg\frac{\alpha}{2}}$$

$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$$

$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$$

$$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$$

$$tg\alpha - tg\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$tg\alpha + tg\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$ctg\alpha - ctg\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$ctg\alpha + ctg\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

Таблиця значень тригонометричних функцій

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$tg\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$ctg\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	–

Формули зведення

Назва функції не змінюється				Назва функції змінюється на схожу			
u	$-\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
tg	$-tg\alpha$	$-tg\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$
$\alpha\neq\frac{\pi}{2}(2n+1), n\in Z$				$\alpha\neq\pi n, n\in Z$			
ctg	$-ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$ctg\alpha$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$
$\alpha\neq\pi n, n\in Z$				$\alpha\neq\frac{\pi}{2}(2n+1), n\in Z$			

Додаток 3. Таблиця похідних

1.	$y = c \quad (c - const)$	$y' = 0$
2.	$y = x$	$y' = 1$
3.	$y = u^n$	$y' = nu^{n-1} \cdot u'$
4.	$y = \sqrt{u}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
5.	$y = a^u \quad (a > 0,\ a \neq 1)$	$y' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
6.	$y = e^u$	$y' = e^u u'$
7.	$y = \log_a u$	$y' = \frac{u'}{u \ln a}$
8.	$y = \ln u$	$y' = \frac{1}{u} u'$
9.	$y = \sin u$	$y' = \cos u \cdot u'$
10.	$y = \cos u$	$y' = -\sin u \cdot u'$
11.	$y = tgu$	$y' = \frac{1}{\cos^2 u} u'$
12.	$y = ctgu$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 u} u'$
13.	$y = \arcsin u$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u'$
14.	$y = \arccos u$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u'$
15.	$y = arctgu$	$y' = \frac{1}{1+u^2} u'$
16.	$y = arcctgu$	$y' = -\frac{1}{1+u^2} u'$

Правила диференціювання

$y = c_1 u \pm c_2 v$	$y' = c_1 u' \pm c_2 v'$
$y = u \cdot v$	$y' = u'v + uv'$
$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
$y = (f(U))$	$y' = f'_U \cdot U'_x$

Додаток 4. Таблиця інтегралів

1. $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$;

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$;

3. $\int a^{x}dx = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C$;

4. $\int e^{x}dx = e^{x} + C$;

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

6. $\int \cos x dx = \sin x + C$;

7. $\int tgx dx = -\ln|\cos x| + C$;

8. $\int ctgx dx = \ln|\sin x| + C$;

9. $\int \dfrac{dx}{\cos^{2} x} = tgx + C$;

10. $\int \dfrac{dx}{\sin^{2} x} = -ctgx + C$;

11. $\int \dfrac{dx}{a^{2}+x^{2}} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a} + C = -\dfrac{1}{a} arcctg \dfrac{x}{a} + C$;

12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^{2}-x^{2}}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C = -\arccos \dfrac{x}{a} + C$;

13. $\int \dfrac{dx}{a^{2}-x^{2}} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C$ – формула високого логарифма;

14. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^{2} \pm a^{2}}} = \ln\left|x + \sqrt{x^{2} \pm a^{2}}\right| + C$ – формула довгого логарифма;

15. $\int \dfrac{xdx}{x^{2} \pm a^{2}} = \dfrac{1}{2} \ln\left|x^{2} \pm a^{2}\right| + C$.

Додаток 5. Розвинення елементарних функцій в ряди

1. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ... \quad (-\infty < x < \infty);$

2. $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + ... \quad (-\infty < x < \infty);$

3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n \frac{x^{21}}{(2n)!} + ... \quad ... \quad (-\infty < x < \infty);$

4. $(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{m(m-1)(m-2)...(m-n+1)}{n!}x^n + ... \quad (-1 < x < 1);$

5. $arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + ...;$

6. $\ln x = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + ... \quad (-1 < x \le 1)$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

Основна

1. Міхайленко В.М., Федоренко Н.Д. Алгебра та геометрія для економістів: Навчальний посібник для студентів екон. спец. ВНЗ – Київ.: Вид-во Європ. ун-ту, 2002. – 100 с.
2. Міхайленко В.М., Федоренко Н.Д. Збірник прикладних задач з вищої математики. – К.: Вид-во Європ. ун-ту, 2004. – 78 с.
3. Колодінська О.В. Вища математика у прикладах і задачах: Навчальний посібник. – К.: Вид-во Європ. ун-ту, 2004. – 54 с.
4. Барковський В.В., Барковська Н.В. Вища математика для економістів: 5-те вид. Навч. посіб. – К.: Центр учбової літератури, 2010. – 448 с.
5. Фортуна В. В., Бескровний О.І. Вища та прикладна математика. Львів, "Магнолія 2006", 2013. – 647 с.
6. Булига К.Б., Міхайленко В.М. Комп'ютерний практикум із застосування математичних методів в економіці. – К: Європейський університет фінансів, інформаційних систем, менеджменту і бізнесу, 2000. – 89 с.
7. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: навчальний посібник для вузів. – Київ : А,С,К, 2012. – 648 с.
8. Міхайленко В.М., Федоренко Н.Д. Математичний аналіз для економістів. – К.: Європейський університет фінансів, інформаційних систем, менеджменту і бізнесу, 1999. – 219 с.

Додаткова

9. Вища математика: підручник / Л. М. Малярець, Л. М. Афанасьєва, Т. В. Денисова та ін.; заг. ред. д.е.н. Малярець Л. М. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2012. – 772 с.
10. Барановська Л.В. Завдання для практичних занять з «Вищої математики»: Методичний посібник. – К.: Вид-во Європ. Ун-ту, 2002.
11. Давидов М.О. Курс математичного аналізу. – К.: Вища школа, 1991. – 366 с.

ЗМІСТ

Навчальне видання

Олена Вікторівна Скляренко

Ганна Михайлівна Терещук

ПРАКТИКУМ
З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

для студентів економічних
спеціальностей

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

3-є видання, оновлене і доповнене

Комп'ютерна верстка *Піддубенко Т.А.*

Дизайн обкладинки *Іванченко Н.М.*

Підписано до друку 12.04.2023. Формат 60х84 1/16.
Папір офсетний. Гарнітура Times New Roman.
Ум. друк. арк. 8,37. Тираж 300.
Зам. № 11.

Друк: поліграфкомбінат Європейського університету.
03115, Україна, Київ-115, вул. Депутатська, 15/17.

Реєстраційне свідоцтво ДК №3833 від 14.07.2010 р.