

О.В. Скляренко, Г.М. Терещук,
Я.О. Колодінська

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Навчальний посібник
для студентів
закладів вищої освіти



ЄВРОПЕЙСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ

О.В. Складенко, Г.М. Терещук, Я.О. Колодінська

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Навчальний посібник
для студентів
закладів вищої освіти

Київ
Видавництво Європейського університету
2024

УДК – 519.86
ББК 22.11
С 43

Рецензенти:

В.В. Вітлінський – доктор економічних наук, професор
(ДВНЗ «Київський національний економічний університет імені Вадима
Гетьмана»)

М.Г. Медведєв – доктор технічних наук, професор
(Таврійський національний університет імені В. І. Вернадського)

*Рекомендовано до друку Вченою радою ПВНЗ «Європейський університет»
(протокол № 9 від 19.12.2023)*

СКЛЯРЕНКО О.В., КОЛОДІНСЬКА Я.О., ТЕРЕЩУК Г.М.

С 43 Економіко-математичне моделювання: Навч. посібник/ О.В. Скляренко,
Г.М. Терещук, Я.О. Колодінська. – К.: Вид-во Європейського університету,
2024. – 200 с.

ISBN 978-966-301-238-4

Навчальний посібник містить стислий виклад основного теоретичного матеріалу, практичні задачі і приклади їх розв'язання, завдання для самостійних робіт, питання для самоперевірки та до підсумкового контролю для вивчення курсу «Економіко-математичне моделювання». Майже весь матеріал подається в прикладах і задачах з економічним змістом і вирішується із застосуванням комп'ютерного прикладного програмного забезпечення Mathcad.

Навчальний посібник призначений для студентів, які навчаються за економічними спеціальностями та спеціальністю «Комп'ютерні науки» закладів вищої освіти, аспірантів, що провадять дослідження з моделювання систем та викладачів зазначеної дисципліни і суміжних з нею.

УДК – 519.86
ББК 22.1

ISBN 978-966-301-238-4

© Європейський університет, 2024
© О.В. Скляренко, Г.М. Терещук, Я.О. Колодінська, 2024

ПЕРЕДМОВА

Сучасна наука характеризується широким використанням математичних методів і моделей.

Курс «Економіко-математичне моделювання» відноситься до професійно орієнтованих дисциплін, засвоєння яких передбачене освітньо-професійними програмами підготовки бакалаврів за спеціальностями 051 «Економіка», інших економічних спеціальностей та спеціальності 122 «Комп'ютерні науки». «Економіко-математичне моделювання» є синтезною дисципліною, яка поєднує в собі математичні методи дослідження і моделювання прикладних задач на прикладі економічних систем і процесів та застосування сучасних комп'ютерних технологій для візуалізації моделей і проведення кількісних досліджень.

Даний навчальний посібник, включає наступні розділи: моделі міжгалузевого балансу, виробничі функції, економічну динаміку, моделі сфери попиту та споживання, оптимізаційні моделі, алгоритмічні (імітаційні) моделі в економіці та підприємництві та ігрові методи моделювання. Кожний розділ містить теоретичні та практичні питання, які виносяться як на аудиторну, так і на самостійну роботу. Практичні питання, в значній мірі, пов'язуються із задачами економічного характеру.

Курс «Економіко-математичне моделювання» має за мету дати студентам знання в області математичного моделювання систем, забезпечити фундаментальність освіти майбутніх фахівців, підготувати з них системних аналітиків, здатних приймати системні і комплексні рішення, використовуючи сучасні інформаційні технології.

Автори ставили за мету ознайомити студентів з основними уявленнями про математичні моделі, що застосовуються в прикладних дослідженнях і методами аналізу цих моделей; навчити їх самостійно працювати з моделями, просуваючись від розуміння того, як побудовані

прості моделі в економіці до розуміння більш складних прикладних математичних моделей.

Навчальна дисципліна «Економіко-математичне моделювання» базується на знаннях, отриманих студентами при вивченні таких дисциплін, як «Лінійна алгебра та аналітична геометрія», «Основи економічних теорій», «Дискретна математика» «Математичний аналіз», «Теорія ймовірності та математична статистика», «Математичні методи і моделі».

Ця дисципліна є професійно-орієнтованою для бакалаврів економічних та технічних спеціальностей і використовується при подальшому вивченні курсів «Теорія прийняття рішень», «Інформаційні системи прийняття рішень в економіці», «Математичні методи дослідження операцій», «Статистичний аналіз та управління ризиками», «Спеціальні методи дослідження операцій» та ін., також є застосовною при виконанні курсових та дипломних робіт та при вирішенні практичних завдань у подальшій професійній діяльності.

Наявність у посібнику численних прикладів економічного змісту, при розв'язанні яких застосовується комп'ютерний прикладний математичний пакет Mathcad, направлено на підвищення зацікавленості студентів до вивчення предмету, оскільки дає можливість візуалізації та швидкого наочного представлення результатів моделювання та обчислень практичних задач.

Посібник буде корисним студентам економічних та технічних спеціальностей, які вивчають математичні методи моделювання в рамках курсів «Економіко-математичні методи і моделі», «Моделювання систем», «Математичні методи дослідження операцій», «Оптимізаційні методи і моделі», «Теорія прийняття рішень», «Спеціальні методи дослідження операцій» та ін.

МОДЕЛІ МІЖГАЛУЗЕВОГО БАЛАНСУ, ВИРОБНИЧІ ФУНКЦІЇ ТА ЕКОНОМІЧНА ДИНАМІКА

1. Вступ. Економіко-математичні моделі, їх класифікація та етапи побудови

1.1. Поняття про економіко-математичні моделі.

1.2. Класифікація та етапи побудови економіко-математичних
моделей.

Основний теоретичний матеріал

1.1. Поняття про економіко-математичні моделі

Економічні системи відносяться до числа найбільш складних систем, які відомі науці, оскільки їм притаманні випадковість, невизначеність, динамічність показників.

Основним методом дослідження складних систем є метод моделювання. Модель являє собою образ реального об'єкту (процесу) в матеріальній або знаковій формі, який відображує суттєві властивості об'єкту, що моделюється та замінює його при дослідженні та управлінні. Метод моделювання базується на принципі аналогії, тобто можливості вивчення реального об'єкту не безпосередньо, а через розгляд подібного йому й більш доступного об'єкту, його моделі.

Математична модель являє собою сукупність рівнянь, нерівностей, функціоналів, логічних умов та інших співвідношень, які відображують взаємозв'язки та залежності основних характеристик системи, що моделюються.

Неможливо уявити собі сучасну науку без широкого використання математичного моделювання. Сутність цієї методології полягає в заміні об'єкта, що досліджується, його образом – математичною моделлю – і подальшим вивченням моделі як методами математичного аналізу

(аналітично), так і за допомогою обчислювально-логічних алгоритмів, які реалізуються на електронних обчислювальних машинах.

Цей метод пізнання, конструювання, проектування поєднує в собі переваги як теорії, так і експерименту. Робота не з самим об'єктом (явищем, процесом), а з його моделлю дає можливість безболісно, відносно швидко і без суттєвих витрат вивчати його властивості й поведінку в будь-яких можливих ситуаціях (переваги теорії). У той же час, обчислювальні експерименти (комп'ютерні, симуляційні, імітаційні) з моделями об'єктів дозволяють, опираючись на можливості сучасних обчислювальних методів і технічних засобів інформатики, детально й глибоко вивчати об'єкти з достатньою повнотою, недоступною чисто теоретичним (аналітичним) підходам (переваги експерименту). Не дивно, що методологія математичного моделювання бурхливо розвивається, охоплюючи все нові сфери – від розробки технічних систем і керування ними до аналізу найскладніших економічних і соціальних процесів.

Використання математичного моделювання можна хронологічно розбити на три етапи його розвитку [20].

Елементи математичного моделювання використовувались із самого початку виникнення точних наук. Не випадково, що деякі методи обчислень названі іменами таких корифеїв науки, як Ньютон і Ейлер, а слово алгоритм походить від імені середньовічного арабського вченого Аль-Хорезмі.

Друге народження цієї методології припало на кінець 40-х – початок 50-х рр. XX ст. і було зумовлено принаймні двома причинами. Перша з них – поява ЕОМ. Друга – безпрецедентне соціальне замовлення – виконання національних програм США і СРСР зі створення ракетно-ядерного щита, які не могли бути реалізованими традиційними методами. Математичне моделювання справилося з цією задачею: ядерні вибухи та польоти ракет і супутників були спочатку здійснені у надрах ЕОМ за допомогою математичних моделей, і лише потім – на практиці.

Зараз математичне моделювання вступає у третій принципово важливий етап свого розвитку – воно вбудовується у структури інформаційного суспільства. Без володіння інформаційними ресурсами не можна навіть уявити розв’язання масштабних проблем, які стоять перед світовою спільнотою. Однак інформація як така мало що дає для аналізу і прогнозу, для прийняття рішень і контролю за їх виконанням. Потрібні надійні способи переробки інформаційної сировини на готовий продукт, тобто на точне знання. Історія методології математичного моделювання переконує: вона може й має бути інтелектуальним ядром інформаційних технологій, усього процесу інформатизації суспільства.

Технічні, екологічні, економічні та інші системи, які вивчаються сучасною наукою, більше не піддаються дослідженню (з потрібною повнотою й точністю) звичайними теоретичними методами. Прямий натурний експеримент над ними є довгим, дорогим, часто або небезпечним, або просто неможливим, оскільки багато з цих систем існують у єдиному екземплярі. Ціна помилок і прорахунків у поводженні з ними неприпустимо висока. Тому математичне моделювання є обов’язковою складовою науково-технічного прогресу.

1.2. Класифікація та етапи побудови економіко-математичних моделей

По загальному цільовому призначенню економіко-математичні моделі діляться на теоретичні, які використовуються для вивчення загальних властивостей економічних систем і прикладні, які дають можливість оцінити параметри функціонування конкретного економічного об’єкту та сформулювати рекомендації для прийняття практичних рішень.

По ступеню агрегування об’єктів моделювання вони розділяються на макроекономічні і мікроекономічні. Перші описують економіку як єдине ціле, пов’язуючи між собою збільшені матеріальні і фінансові показники.

Другі описують взаємодію структурних і функціональних складових економіки (підприємств, фірм тощо).

По фактору часу моделі діляться на статичні, які описують стан економічного об'єкту в конкретний момент або період часу та динамічні, які описують економічні системи в розвитку.

По фактору невизначеності моделі бувають детерміновані, в яких результати на виході однозначно визначаються факторами, які управляються, і стохастичні, в яких вихідні результати залежать ще й від дії випадкових факторів.

По типу математичного апарату, який застосовується виділяються матричні моделі, лінійного та нелінійного програмування, кореляційно-регресійні моделі, моделі сіткового планування й управління, теорії масового обслуговування, теорії ігор, тощо.

По типу підходу до вивчення економічних систем виділяють дескриптивні (описові) та нормативні моделі. При дескриптивному підході будуються моделі, які призначені для опису та пояснення явищ, що спостерігаються фактично або для прогнозу цих явищ. При нормативному підході цікавляться не внутрішньою будовою економічної системи та як вона розвивається, а як вона повинна бути збудована та як повинна діяти, щоб задовольнити наперед визначеним критеріям. В нашій країні досить довго переважав нормативний підхід у моделюванні, що базується на оптимізації. Прикладами нормативних моделей є всі оптимізаційні моделі та моделі рівня життя.

Процес моделювання, в тому числі економіко-математичного, включає в себе три структурних елементи: об'єкт дослідження, суб'єкт (дослідник) та модель, яка опосередковує відношення між ними.

Розглянемо загальну схему процесу моделювання, яка складається з наступних етапів.

1. Попереднє знайомство, вивчення та аналіз системи. На цьому етапі дослідники отримують загальне уявлення про систему, ціль, умови її функціонування, структуру, тощо.

2. Загальна економічна постановка задачі. Поряд з детальним аналізом системи, формулюється задача дослідження, приймаються необхідні припущення, виділяються найважливіші риси та властивості об'єкту, який моделюється.

3. Побудова математичної моделі (математична постановка задачі). Це етап формалізації економічної проблеми, тобто вираження її у вигляді конкретних математичних залежностей (рівнянь, нерівностей і т. ін.). При цьому слід зазначити, що повний опис складної економічної системи, як правило, складається з ряду окремих математичних моделей, які відносяться до якісно різних явищ і процесів, що протікають в системі.

4. Математичний аналіз моделі. На цьому етапі, використовуючи математичні методи, виявляються загальні властивості моделі та її розв'язків. Проте моделі складних економічних систем дуже важко піддаються аналітичному дослідженню і в таких випадках переходять до чисельних методів.

5. Підготовка вхідної інформації. В економічних задачах це, як правило, найбільш важкий етап моделювання, який не зводиться до пасивного збору даних. При цьому слід враховувати витрати на підготовку якісної інформації. При системному моделюванні результати функціонування одних моделей можуть служити вхідною інформацією для інших.

6. Чисельний розв'язок. На цьому етапі розробляються алгоритми і програми чисельного розв'язку задачі і проводяться розрахунки. Чисельні розв'язки суттєво доповнюють результати аналітичних досліджень етапу.

7. Аналіз результатів та їх застосування. На цьому етапі в першу чергу перевіряється адекватність моделі по тим властивостям, які вибрані як суттєві, проходить тестування моделі. Якщо вона з достатньою точністю моделює економічну систему, що вивчається, вона застосовується по призначенню. У протилежному випадку можливе повернення і коригування попередніх етапів.

2. Моделі міжгалузевого балансу

2.1. Основні елементи та аналіз міжгалузевих зв'язків.

Модель міжгалузевого балансу Леонтьєва.

2.2. Ціни в системі міжгалузевих зв'язків.

2.3. Модель експорту та імпорту.

2.4. Лінійна модель міжнародної торгівлі.

***Мета практичної роботи:** ознайомитися з моделлю міжгалузевого балансу та набутти навичок застосування обчислювальної техніки при розв'язанні матричних задач економіки; ознайомитися з методикою обчислення ціни та набутти навичок використання обчислювальної техніки при визначенні ціни продукції; ознайомитися із складанням міжгалузевого балансу для відкритої економічної системи на державному рівні із врахуванням експорту та імпорту; ознайомитися з моделлю міжнародної торгівлі.*

Основний теоретичний матеріал

2.1. Основні елементи та аналіз міжгалузевих зв'язків.

Модель міжгалузевого балансу Леонтьєва

Міжгалузевий баланс в економіці – це метод аналізу взаємозв'язків між різноманітними секторами економічної системи.

Припустимо, що досліджувану економічну систему можна розділити на декілька галузей (секторів), що виробляють певні товари і послуги (сільське господарство, промисловість, транспорт, енергетика і т. п.). При виробництві товарів і послуг у кожному секторі витрачаються ресурси у вигляді сировини, робочої сили, устаткування й ін., що виробляються як в інших секторах господарства, так і в даному секторі. Це означає, що кожний сектор економіки виступає в системі міжгалузевих зв'язків одночасно виробником і споживачем.

Мета балансового аналізу – *визначити, скільки продукції повинен виробити кожний сектор для того, щоб задовольнити усі потреби економічної системи в його продукції.*

Розглянемо спрощену модель міжгалузевого балансу – баланс економіки, що складається з трьох секторів – із сільського господарства, промисловості і домашніх господарств [2]. У якості одиниці виміру обсягів товарів і послуг кожного сектора виберемо їхню вартість. Припустимо, що уся продукція сільського господарства складає 200 грошових одиниць, із них 50 одиниць споживається усередині самого сектора, 40 одиниць – у промисловості і 110 – в домашніх господарствах. Продукція промисловості складає 250 одиниць; із них 70 одиниць споживаються в сільськогосподарському виробництві, 30 – у секторі промисловості і 150 – в домашніх господарствах. Транспорт виробляє 300 одиниць продукції, із них 80 одиниць споживаються в сільському господарстві, 180 – у промисловості і 40 – усередині самого сектора. Ці дані зведені в таблицю міжгалузевого балансу 1.1.

Числа, розташовані в рядках таблиці, показують, як розподіляється вироблена продукція кожного сектора, останній елемент рядка – обсяг виробленої сектором продукції (загальний випуск). Числа, розташовані в стовпчиках показують, яку продукцію споживає кожний сектор у процесі виробництва, останнє число в стовпчику – сумарні витрати сектора. У табл. 1.1 подана таблиця міжгалузевих зв'язків економічної системи, у якій всі сектори є виробляючими, уся вироблена продукція споживається цими ж виробляючими секторами. Така модель міжгалузевих зв'язків називається *замкненою*. У замкненій моделі обсяг витрат кожного сектора (сума елементів у стовпчику таблиці) дорівнює обсягу виробленої продукції (сума елементів у відповідному рядку).

Таблиця 1.1

	Сільське господарство	Промисловість	Транспорт	Загальний випуск
Сільське господарство	50	40	110	200
Промисловість	70	30	150	250
Транспорт	80	180	40	300
Витрати	200	250	300	

Таблиці міжгалузевого балансу описують потоки товарів і послуг між секторами економіки протягом фіксованого проміжку часу, наприклад, протягом року.

Результати, що зберігаються в таблицях, природно описувати й аналізувати в термінах матричної алгебри.

Якщо позначити через $B = \{b_{ij}\}_{i,j=1}^n$ матрицю, елемент якої b_{ij} – кількість товарів і послуг i -го сектора економіки, споживаного в j -му секторі, то в замкненій економічній системі баланс між сукупним випуском і витратами кожного сектора можна описати рівностями

$$\sum_{j=1}^n b_{kj} = \sum_{j=1}^n b_{jk}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Матриця B називається *матрицею міжгалузевого балансу* (її також називають *матрицею Леонтьєва*).

Розглянемо *відкриту* систему міжгалузевих зв'язків [2], у якій вся вироблена продукція (сукупний продукт) розділяється на дві частини: одна частина продукції (проміжний продукт) йде на споживання у виробляючих секторах, а інша її частина (кінцевий продукт) споживається поза сферою матеріального виробництва – у секторі кінцевого попиту; при цьому споживання в секторі кінцевого попиту може змінюватися.

Позначимо:

x_i – обсяг випуску i -го сектора (обсяг товарів і послуг зроблених в одному з n виробляючих секторів), $i = 1, 2, \dots, n$;

b_{ij} – обсяг товарів і послуг i -го сектора, споживаних у j -м секторі;

y_i – кінцевий продукт i -го сектора (обсяг продукції i -го сектора, споживаної в секторі кінцевого попиту);

$a_{ij} = \frac{b_{ij}}{x_j}$ – кількість продукції j -го сектора, що витрачається при виробництві однієї одиниці продукції i -го сектора (*коефіцієнти прямих витрат*).

Міжгалузевий баланс – це відповідність обсягу випуску кожного виробляючого сектора сумарному обсягу його продукції, споживаної виробничими секторами і сектором кінцевого попиту. У приведених позначеннях маємо *співвідношення балансу*:

$$x_i = \sum_{j=1}^n b_{ij} + y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Співвідношення балансу, записані через коефіцієнти прямих витрат, мають вигляд

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

або, що те саме

$$x_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j = y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Останні рівності описують технологію виробництва і структуру економічних зв'язків і означають, що в сектор кінцевого попиту від кожного виробничого сектора надходить та частина зробленої продукції, що залишається після того, як забезпечені потреби виробляючих секторів.

Якщо позначити вектор випуску через X , вектор попиту (вектор кінцевого продукту) – через Y , а *структурну матрицю економіки* – матрицю, елементами якої є коефіцієнти прямих витрат a_{ij} – через A , то співвідношення балансу в матричній формі будуть мати вигляд:

$$(E - A)X = Y.$$

Одна з основних задач міжгалузевого балансу – *знайти при заданій структурній матриці економічної системи в умовах балансу сукупний випуск, необхідний для задоволення заданого попиту*.

Мовою лінійної алгебри це означає, що потрібно розв'язати систему лінійних рівнянь $(E - A)X = Y$ щодо невідомого вектора X при заданій матриці системи $E - A$ і правій частині Y . Якщо матриця $E - A$ має обернену, то

Позначимо

Якщо записати вираз компонент вектора випуску X через компоненти вектора кінцевого попиту Y

то стає зрозумілим, що елемент d_{ij} матриці $(E - A)^{-1}$ показує, на скільки потрібно збільшити випуск i -го сектора при збільшенні на одиницю кінцевого попиту y_i на продукцію j -го сектора.

14

$$\begin{vmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 1-a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & 1-a_{nn} \end{vmatrix} > 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1,n-1} \\ -a_{21} & 1-a_{22} & \dots & -a_{2,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n-1,1} & -a_{n-1,2} & \dots & 1-a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} > 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1-a_{22} \end{vmatrix} > 0,$$

$$1-a_{11} > 0.$$

2.2. Ціни в системі міжгалузевих зв'язків

Ціни в розглянутій вище відкритій моделі міжгалузевих зв'язків визначаються із системи рівнянь, кожне з яких встановлює, що ціна одиниці продукції виробляючого сектора повинна дорівнювати сукупним витратам виробництва в розрахунку на одиницю випущеної в цьому секторі продукції. У витрати входить не тільки плата за ресурси, що придбано в даному й інших секторах, але і додана вартість (заробітна платня, прибуток підприємців, урядові податки, які виплачуються уряду й іншим секторам кінцевого попиту, і ін.).

Позначимо:

v_i – сумарні платежі i -го сектора за одну одиницю виробленої i -м сектором продукції;

p_j – ціна одиниці продукції j -го сектора;

b_{ij} – обсяг товарів і послуг i -го сектора, споживаних при виробництві продукції в j -му секторі (як і вище).

Тоді $x_i p_i = \sum_{j=1}^n b_{ji} p_j + v_i x_i$, але оскільки $b_{ji} = a_{ji} x_i$, то $x_i p_i = \sum_{j=1}^n a_{ji} x_i p_j + v_i x_i$,

або $x_i p_i - \sum_{j=1}^n a_{ji} x_i p_j = v_i x_i$.

ВИГЛЯДІ СИСТЕМИ

[illegible]

У матричній формі система рівнянь для цін має вигляд

$$(E - A)^T P = V,$$

де A – структурна матриця економіки;

V – заданий вектор платежів;

P – шуканий вектор цін.

Тоді ціни P можна знайти за формулою $P = \left((E - A)^T \right)^{-1} V$, або, що те ж саме,

$$P = \left((E - A)^{-1} \right)^T V ,$$

або врахувавши позначення $D = (E - A)^{-1} = \{d_{ij}\}$

$$P = D^T \cdot V$$

Аналітичні вирази ціни P через платежі V мають вигляд:

$$\begin{cases} p_1 = d_{11}v_1 + d_{21}v_2 + \dots + d_{n1}v_n, \\ p_2 = d_{12}v_1 + d_{22}v_2 + \dots + d_{n2}v_n, \\ \vdots \\ p_n = d_{1n}v_1 + d_{2n}v_2 + \dots + d_{nn}v_n. \end{cases}$$

З наведених рівностей очевидно, що елемент d_{ij} матриці $(E - A)^{-1}$ показує, як зміниться ціна p_i , одиниці продукції i -го сектора при зміні на одиницю платежу v_j у j -му секторі.

Оскільки $X^T V = X^T (E - A)^T P = ((E - A)X)^T \cdot P = Y^T P$, то для розглянутої моделі міжгалузевго балансу справедлива тотожність $\sum_{i=1}^n x_i v_i = \sum_{i=1}^n y_i p_i$.

Ліва частина цієї тотожності дорівнює загальній сумі доданих вартостей, які виплачуються у сектор кінцевого попиту, а права частина –

сумарна вартість продукції, поставленої виробничими секторами у сектор кінцевого попиту. Іншими словами, наведена тотожність підтверджує збіг зробленого і використаного національного доходу.

2.3. Модель експорту та імпорту

Розглянемо відкриту систему міжгалузевих зв'язків на державному рівні. Якщо економіка держави перестає бути самодостатньою і держава починає імпортувати й експортувати продукцію виробничих секторів, у той час як сектор кінцевого попиту споживає ті ж кількості продукції виробничих секторів, то встановлюється новий баланс між витратами і випуском. Структурна матриця економіки, а отже, і матриця $(E - A)^{-1}$ залишаються колишніми, змінюється кінцевий попит. До величини платежів у сектор кінцевого попиту кожного сектора потрібно додати обсяг експорту і відняти з нього обсяг імпорту (імпорт можна розглядати як від'ємний експорт)

$$y_k = y'_k + e_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Тут y_k – заданий кінцевий попит, що не змінився, на продукцію k -го сектора; y'_k – обсяг кінцевого продукту k -го сектора при наявності експорту й імпорту, e_k – обсяг експорту ($e_k > 0$) або імпорту ($e_k < 0$) продукції k -го сектора.

Таким чином, у таблиці міжгалузевого балансу стовпчик сектора кінцевого попиту розбивається на три стовпчики: стовпчик заданого кінцевого попиту, стовпчика експорту-імпорту і стовпчика кінцевого продукту, причому кожний елемент останнього з цих трьох стовпчиків дорівнює сумі відповідних чисел у попередніх двох.

	Кінцевий попит	Експорт-імпорт	Кінцевий продукт
Сільське господарство	100	-20	100-20
Промисловість	150	40	150+40
Транспорт	120	0	120+0

Випуск X обчислюється за формулою

$$X = (E - A)^{-1} Y',$$

де $Y' = Y + EI$; Y – кінцевий попит, що не змінився; EI – експорт-імпорт; A – структурна матриця економіки.

Вирахувавши вектор випуску X , можна знайти за формулою $b_{ij} = a_{ij}x_j$ елементи b_{ij} матриці нового міжгалузевого балансу B .

2.4. Лінійна модель міжнародної торгівлі

Розглянемо модель міжнародної торгівлі, у якій беруть участь n країн. Позначимо:

x_i – національний дохід i -ї країни;

a_{ij} – частка національного доходу j -ї країни, яку вона витрачає на закупівлю товарів i -ї країни;

p_i – загальний виторг від внутрішньої і зовнішньої торгівлі.

Вважатимемо, що кожна держава витрачає увесь свій національний дохід на закупівлю товарів усередині країни i на імпорт з інших країн. Це означає, що

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Матриця A , елементами якої є коефіцієнти a_{ij} , називається структурною матрицею торгівлі. Сума елементів кожного стовпчика цієї матриці дорівнює одиниці.

Припустимо, що протягом визначеного фіксованого проміжку часу структура міжнародної торгівлі не змінюється (не змінюється структурна матриця торгівлі), а національні доходи торгуючих країн можуть змінитися.

Потрібно визначити, якими можуть бути ці національні доходи, щоб міжнародна торгівля залишилася збалансованою, тобто щоб сума платежів

Приклади розв'язання задач

2.1. Розглядається модель економіки, у якій виділені чотири сектори: три виробляючі сектори (промисловість, сільське господарство, транспорт) і сектор кінцевого попиту. Структура економіки описана в таблиці міжгалузевого балансу 2.1 (обсяги указані в одиницях вартості).

Таблиця 2.1

	Сільське господарство	Промисловість	Транспорт	Сектор кінцевого попиту	Загальний випуск
Сільське господарство	50	16	120	60	246
Промисловість	30	10	180	100	320
Транспорт	15	14	140	80	249

Обчисліть вектор випуску для вектора кінцевого попиту $Y = (100, 150, 120)$. Як повинен змінитися випуск кожного сектора, якщо попит на транспортні послуги збільшиться на 5%?

Розв'язання

Фрагмент робочого документа Mathcad із відповідними обчисленнями і коментарями наведено нижче.

ORIGIN:=1

$$\begin{pmatrix} 50 & 16 & 120 & 60 \\ 30 & 10 & 180 & 100 \\ 15 & 14 & 140 & 80 \end{pmatrix}$$

Введемо матрицю міжгалузевого балансу

$$B := \begin{pmatrix} 50 & 16 & 120 \\ 30 & 10 & 180 \\ 15 & 14 & 140 \end{pmatrix}$$

Введемо вектор випуску

$$X := \begin{pmatrix} 246 \\ 320 \\ 249 \end{pmatrix}$$

Введемо вектор кінцевого попиту

$$Y := \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \\ 120 \end{pmatrix}$$

Побудуємо структурну матрицю економіки A

$$j := 1..3$$

$$i := 1..3$$

$$A_{i,j} := \frac{B_{i,j}}{X_j}$$

Структурна матриця має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 0.203 & 0.05 & 0.482 \\ 0.122 & 0.031 & 0.723 \\ 0.061 & 0.031 & 0.562 \end{pmatrix}$$

$$E := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1.41 & 0.13 & 1.767 \\ 0.342 & 1.122 & 2.229 \\ 0.221 & 0.098 & 2.69 \end{pmatrix}$$

Оскільки елементи матриці $(E - A)^{-1}$ невід'ємні, то розв'язок існує.

Обчислимо випуск при кінцевому попиті

$$X := (E - A)^{-1} \cdot Y$$

$$X = \begin{pmatrix} 372.501 \\ 470.047 \\ 359.571 \end{pmatrix}$$

Елементи 3-го стовпчика матриці повних витрат D вказують на зміну випуску у вироблюючих секторах при збільшенні на одну одиницю потреб в транспортних послугах.

Збільшення потреб в транспортних послугах на 5% складає

$$0.05Y_3 = 6$$

Відповідне збільшення випуску дорівнює

$$0.05Y_3 \left[(E - A)^{-1} \right]^{(3)} = \begin{pmatrix} 10.601 \\ 13.377 \\ 16.138 \end{pmatrix}$$

2.2. Знайдіть ціни, на одиницю продукції кожного виробничого сектора з завдання 2.1 для вектора платежів $V = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$. Зазначте, як збільшуються ціни на транспортні послуги при збільшенні на одиницю платежів у сектор сільського господарства.

Розв'язання

Фрагмент робочого документа Mathcad із відповідними обчисленнями і коментарями наведено нижче.

Задамо вектор платежів

$$V := \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

Знайдемо вектор цін

$$P := \left[(E - A)^{-1} \right]^T \cdot V$$

$$P = \begin{pmatrix} 1.41 & 0.342 & 0.221 \\ 0.13 & 1.122 & 0.098 \\ 1.767 & 2.229 & 2.69 \end{pmatrix}$$

$$D := (E - A)^{-1}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1.41 & 0.13 & 1.767 \\ 0.342 & 1.122 & 2.229 \\ 0.221 & 0.098 & 2.69 \end{pmatrix}$$

При збільшенні на одну одиницю платежів в секторі сільського господарства (1-й сектор в таблиці) вартість одиниці транспортних послуг (3-й сектор в таблиці) зростає на величину

$$D_{1,3} = 1.767$$

2.3. Дослідіть задану структурною матрицею з завдання 2.1 модель міжгалузевого балансу економічної системи. Знайдіть обсяг випуску кожної галузі по заданому кінцевому попиту при наявності експорту й

імпорту $EI = \begin{pmatrix} -20 \\ 40 \\ 0 \end{pmatrix}$. Знайдіть матрицю нового балансу. Перевірте слушність обчислень.

Розв'язання

Фрагмент робочого документа Mathcad із відповідними обчисленнями і коментарями наведено нижче.

Задамо експорт-імпорт

$$EI := \begin{pmatrix} -20 \\ 40 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Обчислимо кінцевий попит

$$Y1 := Y + EI$$

$$Y1 = \begin{pmatrix} 80 \\ 190 \\ 120 \end{pmatrix}$$

Обчислимо випуск при новому кінцевому попиті

$$X := (E - A)^{-1} \cdot Y1$$

$$X = \begin{pmatrix} 349.488 \\ 508.074 \\ 359.08 \end{pmatrix}$$

Обчислимо матрицю нового міжгалузевого балансу

$$B_{i,j} := A_{i,j} \cdot X_j$$

$$B = \begin{pmatrix} 71.034 & 25.404 & 173.051 \\ 42.621 & 15.877 & 259.576 \\ 21.31 & 15.877 & 201.892 \end{pmatrix}$$

2.4. Знайдіть національні доходи торгуючих країн у збалансованій системі міжнародної торгівлі із заданою структурною матрицею торгівлі

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{10} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Фрагмент робочого документа Mathcad із відповідними обчисленнями і коментарями наведено нижче.

Задамо структурну матрицю торгівлі

$$A := \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{10} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Знайдемо національні доходи торгуючих країн. Для цього обчислимо власний вектор матриці A, що відповідає одиничному власному значенню

$$\text{eigenvec}(A, 1) = \begin{pmatrix} 0.599 \\ 0.585 \\ 0.356 \\ 0.415 \end{pmatrix}$$

З наведених обчислень видно, що для зберігання балансу в системі міжнародної торгівлі національні доходи країн повинні знаходитись у пропорції 0.599 : 0.585 : 0.356 : 0.415.

Завдання для самостійної роботи

2.1. Дослідити задану таблицею міжгалузевого балансу модель економічної системи. Знайти обсяг випуску кожної галузі при заданому новому кінцевому попиті Y . Знайти, як зміниться випуск кожного сектора при збільшенні попиту на транспортні послуги на 7 %.

Для розв'язання задачі можна використовувати стандартні програмні засоби (Mathcad, Excel та ін.)

№		Сільське госпо- дарство	Промис- ловість	Транспорт	Кінцевий попит	Загальний випуск	Новий кінцевий попит Y
1	Сільське господарство	10	16	50	20	96	100
	Промисловість	3	15	40	23	81	100
	Транспорт	2	26	30	32	90	110
2	Сільське господарство	20	22	100	30	172	180
	Промисловість	6	20	80	26	132	150
	Транспорт	5	32	60	35	132	140

№		Сільське госпо- дарство	Промис- ловість	Транспорт	Кінцевий попит	Загальний випуск	Новий кінцевий попит Y
3	Сільське господарство	30	38	150	40	248	230
	Промисловість	10	25	120	30	185	190
	Транспорт	7	38	90	37	172	180
4	Сільське господарство	40	34	200	50	324	340
	Промисловість	13	30	160	33	236	240
	Транспорт	10	44	120	40	214	200
5	Сільське господарство	50	40	250	60	400	500
	Промисловість	16	35	200	36	287	300
	Транспорт	12	50	150	42	254	230
6	Сільське господарство	60	46	300	70	476	500
	Промисловість	20	40	240	40	340	350
	Транспорт	15	56	180	45	296	300
7	Сільське господарство	70	52	350	80	552	570
	Промисловість	23	45	280	43	391	400
	Транспорт	17	62	210	47	336	370
8	Сільське господарство	80	58	400	90	628	600
	Промисловість	26	50	320	46	442	450
	Транспорт	20	68	240	50	378	400
9	Сільське господарство	90	64	450	100	704	700
	Промисловість	30	55	360	50	495	470
	Транспорт	22	74	270	52	418	430
10	Сільське господарство	60	46	300	70	476	480
	Промисловість	20	40	240	40	340	400
	Транспорт	15	56	180	45	296	350
11	Сільське господарство	100	70	500	110	780	790
	Промисловість	33	60	400	53	546	650
	Транспорт	25	50	300	55	460	470
12	Сільське господарство	70	52	350	80	552	560
	Промисловість	23	45	280	43	391	400
	Транспорт	17	62	210	47	336	350
13	Сільське господарство	90	64	450	100	704	700
	Промисловість	30	55	360	50	495	677
	Транспорт	22	74	270	52	418	400
14	Сільське господарство	100	70	500	11	780	700
	Промисловість	33	60	400	53	546	470
	Транспорт	25	80	300	55	460	600
15	Сільське господарство	90	64	450	100	704	710
	Промисловість	36	65	440	56	597	670
	Транспорт	27	86	330	51	500	500
16	Сільське господарство	130	88	650	140	100	1000
	Промисловість	43	75	520	63	701	710
	Транспорт	32	98	390	62	582	560

№		Сільське господарство	Промисловість	Транспорт	Кінцевий попит	Загальний випуск	Новий кінцевий попит Y
17	Сільське господарство	140	94	700	150	108	1100
	Промисловість	46	80	560	66	752	800
	Транспорт	35	104	420	65	624	640
18	Сільське господарство	10	16	50	20	96	110
	Промисловість	3	15	40	23	81	90
	Транспорт	2	26	30	32	90	89
19	Сільське господарство	20	16	50	20	106	115
	Промисловість	3	15	40	23	81	90
	Транспорт	22	26	30	32	110	100
20	Сільське господарство	70	52	350	80	552	560
	Промисловість	23	45	280	43	391	410
	Транспорт	17	62	210	47	336	350
21	Сільське господарство	90	64	450	100	704	720
	Промисловість	30	55	360	50	495	500
	Транспорт	22	74	270	52	418	420
22	Сільське господарство	100	70	500	11	780	790
	Промисловість	33	60	400	53	546	550
	Транспорт	25	80	300	55	460	440
23	Сільське господарство	90	64	450	100	704	760
	Промисловість	30	55	360	50	495	450
	Транспорт	22	74	270	52	418	430
24	Сільське господарство	60	46	300	70	476	500
	Промисловість	20	40	240	40	340	350
	Транспорт	15	56	180	45	296	310
25	Сільське господарство	100	70	500	НО	780	800
	Промисловість	33	60	400	53	546	600
	Транспорт	25	80	300	55	460	470
26	Сільське господарство	60	46	300	70	476	480
	Промисловість	20	40	240	40	340	450
	Транспорт	15	56	180	45	296	260
27	Сільське господарство	70	52	350	80	552	560
	Промисловість	23	45	280	43	391	410
	Транспорт	17	62	210	47	336	400
28	Сільське господарство	80	58	400	90	628	780
	Промисловість	26	50	320	46	442	500
	Транспорт	20	68	240	50	378	350
29	Сільське господарство	40	34	200	50	324	400
	Промисловість	13	30	160	33	236	230
	Транспорт	10	44	120	40	214	250
30	Сільське господарство	50	40	250	60	400	420
	Промисловість	16	35	200	36	287	350
	Транспорт	12	50	150	42	254	320

2.2. Знайдіть ціни на одиницю продукції кожного виробничого сектора із завдання 1.1 для вказаного вектора платежів. Визначіть, як збільшуються ціни на транспортні послуги при збільшенні на одиницю платежів у сектор сільського господарства.

№	Платежі		
1	0.5	0.7	0.3
2	0.4	0.2	0.2
3	0.5	0.4	0.2
4	0.6	0.4	0.3
5	0.4	0.3	0.2
6	0.5	0.4	0.2
7	0.5	0.6	0.3
8	0.4	0.3	0.4
9	0.4	0.5	0.3
10	0.6	0.4	0.6
11	0.5	0.6	0.4
12	0.4	0.3	0.1
13	0.5	0.3	0.3
14	0.5	0.5	0.3
15	0.4	0.2	0.3
16	0.4	0.3	0.2
17	0.5	0.7	0.4
18	0.4	0.2	0.5
19	0.5	0.5	0.2
20	0.6	0.3	0.5
21	0.5	0.6	0.3
22	0.4	0.2	0.11
23	0.5	0.3	0.2
24	0.5	0.4	0.3
25	0.4	0.2	0.2
26	0.5	0.3	0.2
27	0.5	0.7	0.3
28	0.4	0.2	0.4
29	0.4	0.5	0.2
30	0.6	0.4	0.5

2.3. Дослідіть задану структурною матрицею з завдання 1.1 модель міжгалузевого балансу економічної системи. Знайдіть обсяг випуску кожної галузі по заданому кінцевому попиту при наявності експорту й

імпорту. Знайдіть матрицю нового балансу. Перевірте слушність обчислень.

№	Експорт-імпорт		
1	16	15	-6
2	22	20	-2
3	28	-25	38
4	34	30	-10
5	40	35	-12
6	46	-20	56
7	52	45	-17
8	10	30	-5
9	20	-10	6
10	-20	5	7
11	10	30	-5
12	-10	6	-5
13	-40	10	5
14	-50	10	-3
15	-20	10	-5
16	-30	-6	-20
17	-30	-6	10
18	30	-13	-5
19	-30	-30	10
20	-50	-6	5
21	-50	-6	3
22	10	-3	8
23	-10	30	-7
24	-46	40	56
25	-70	60	80
26	-46	40	56
27	-52	45	62
28	-58	50	68
29	-34	30	44
30	-40	35	50

2.4. Знайдіть національні доходи торгуючих країн у збалансованій системі міжнародної торгівлі із заданою структурною матрицею торгівлі А:

$$1. A = \begin{pmatrix} 0.091 & 0.059 & 0.182 & 0.333 \\ 0.409 & 0.441 & 0.318 & 0.333 \\ 0.169 & 0.4 & 0.273 & 0.167 \\ 0.331 & 0.1 & 0.227 & 0.167 \end{pmatrix}$$

$$16. A = \begin{pmatrix} 0.289 & 0.059 & 0.282 & 0.333 \\ 0.299 & 0.041 & 0.402 & 0.383 \\ 0.269 & 0.08 & 0.273 & 0.167 \\ 0.143 & 0.82 & 0.043 & 0.117 \end{pmatrix}$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 0.086 & 0.059 & 0.182 & 0.333 \\ 0.45 & 0.441 & 0.448 & 0.333 \\ 0.169 & 0.48 & 0.273 & 0.167 \\ 0.295 & 0.02 & 0.097 & 0.167 \end{pmatrix}$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 0.191 & 0.059 & 0.182 & 0.333 \\ 0.409 & 0.441 & 0.318 & 0.333 \\ 0.069 & 0.45 & 0.273 & 0.167 \\ 0.331 & 0.05 & 0.227 & 0.167 \end{pmatrix}$$

$$4. A = \begin{pmatrix} 0.286 & 0.059 & 0.182 & 0.333 \\ 0.45 & 0.441 & 0.448 & 0.433 \\ 0.169 & 0.48 & 0.273 & 0.167 \\ 0.095 & 0.02 & 0.097 & 0.067 \end{pmatrix}$$

$$5. A = \begin{pmatrix} 0.091 & 0.059 & 0.182 & 0.333 \\ 0.409 & 0.441 & 0.318 & 0.333 \\ 0.169 & 0.305 & 0.273 & 0.167 \\ 0.331 & 0.195 & 0.227 & 0.167 \end{pmatrix}$$

$$6. A = \begin{pmatrix} 0.086 & 0.059 & 0.182 & 0.233 \\ 0.45 & 0.441 & 0.448 & 0.433 \\ 0.169 & 0.48 & 0.273 & 0.167 \\ 0.295 & 0.02 & 0.097 & 0.167 \end{pmatrix}$$

$$7. A = \begin{pmatrix} 0.391 & 0.159 & 0.182 & 0.333 \\ 0.409 & 0.441 & 0.318 & 0.333 \\ 0.169 & 0.365 & 0.273 & 0.167 \\ 0.031 & 0.035 & 0.227 & 0.167 \end{pmatrix}$$

$$8. A = \begin{pmatrix} 0.086 & 0.059 & 0.182 & 0.333 \\ 0.49 & 0.441 & 0.448 & 0.333 \\ 0.369 & 0.48 & 0.273 & 0.167 \\ 0.055 & 0.02 & 0.097 & 0.167 \end{pmatrix}$$

$$9. A = \begin{pmatrix} 0.191 & 0.359 & 0.182 & 0.433 \\ 0.109 & 0.241 & 0.318 & 0.333 \\ 0.369 & 0.36 & 0.273 & 0.167 \\ 0.331 & 0.04 & 0.227 & 0.067 \end{pmatrix}$$

$$10. A = \begin{pmatrix} 0.586 & 0.059 & 0.682 & 0.333 \\ 0.19 & 0.341 & 0.048 & 0.383 \\ 0.069 & 0.48 & 0.173 & 0.167 \\ 0.155 & 0.12 & 0.097 & 0.117 \end{pmatrix}$$

$$17. A = \begin{pmatrix} 0.201 & 0.379 & 0.182 & 0.163 \\ 0.209 & 0.271 & 0.118 & 0.163 \\ 0.209 & 0.32 & 0.173 & 0.167 \\ 0.381 & 0.03 & 0.527 & 0.507 \end{pmatrix}$$

$$18. A = \begin{pmatrix} 0.389 & 0.159 & 0.282 & 0.333 \\ 0.25 & 0.141 & 0.148 & 0.383 \\ 0.349 & 0.18 & 0.473 & 0.167 \\ 0.012 & 0.52 & 0.097 & 0.117 \end{pmatrix}$$

$$19. A = \begin{pmatrix} 0.241 & 0.349 & 0.172 & 0.163 \\ 0.249 & 0.171 & 0.178 & 0.163 \\ 0.249 & 0.47 & 0.173 & 0.167 \\ 0.261 & 0.01 & 0.477 & 0.507 \end{pmatrix}$$

$$20. A = \begin{pmatrix} 0.189 & 0.189 & 0.282 & 0.333 \\ 0.199 & 0.181 & 0.348 & 0.383 \\ 0.119 & 0.18 & 0.273 & 0.167 \\ 0.493 & 0.45 & 0.097 & 0.117 \end{pmatrix}$$

$$21. A = \begin{pmatrix} 0.151 & 0.179 & 0.172 & 0.153 \\ 0.159 & 0.275 & 0.378 & 0.163 \\ 0.159 & 0.275 & 0.173 & 0.177 \\ 0.531 & 0.271 & 0.277 & 0.507 \end{pmatrix}$$

$$22. A = \begin{pmatrix} 0.386 & 0.289 & 0.352 & 0.333 \\ 0.196 & 0.281 & 0.348 & 0.383 \\ 0.316 & 0.28 & 0.263 & 0.167 \\ 0.102 & 0.15 & 0.037 & 0.117 \end{pmatrix}$$

$$23. A = \begin{pmatrix} 0.151 & 0.179 & 0.272 & 0.153 \\ 0.159 & 0.275 & 0.278 & 0.163 \\ 0.359 & 0.275 & 0.273 & 0.177 \\ 0.331 & 0.271 & 0.177 & 0.507 \end{pmatrix}$$

$$24. A = \begin{pmatrix} 0.386 & 0.222 & 0.352 & 0.333 \\ 0.196 & 0.233 & 0.278 & 0.383 \\ 0.316 & 0.48 & 0.263 & 0.167 \\ 0.102 & 0.065 & 0.107 & 0.117 \end{pmatrix}$$

$$25. A = \begin{pmatrix} 0.151 & 0.179 & 0.272 & 0.253 \\ 0.159 & 0.275 & 0.278 & 0.263 \\ 0.159 & 0.275 & 0.273 & 0.277 \\ 0.531 & 0.271 & 0.177 & 0.207 \end{pmatrix}$$

$$11. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.291 & 0.359 & 0.282 & 0.433 \\ 0.509 & 0.241 & 0.218 & 0.333 \\ 0.069 & 0.46 & 0.373 & 0.167 \\ 0.131 & -0.06 & 0.127 & 0.067 \end{pmatrix}$$

$$12. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.186 & 0.059 & 0.682 & 0.333 \\ 0.19 & 0.041 & 0.048 & 0.383 \\ 0.169 & 0.08 & 0.173 & 0.167 \\ 0.455 & 0.82 & 0.097 & 0.117 \end{pmatrix}$$

$$13. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.291 & 0.359 & 0.282 & 0.433 \\ 0.509 & 0.241 & 0.118 & 0.333 \\ 0.169 & 0.36 & 0.173 & 0.167 \\ 0.031 & 0.04 & 0.427 & 0.067 \end{pmatrix}$$

$$14. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.286 & 0.059 & 0.282 & 0.333 \\ 0.29 & 0.041 & 0.248 & 0.383 \\ 0.269 & 0.08 & 0.273 & 0.167 \\ 0.155 & 0.82 & 0.197 & 0.117 \end{pmatrix}$$

$$15. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.101 & 0.359 & 0.282 & 0.363 \\ 0.109 & 0.241 & 0.118 & 0.363 \\ 0.109 & 0.36 & 0.173 & 0.167 \\ 0.681 & 0.04 & 0.427 & 0.107 \end{pmatrix}$$

$$26. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.186 & 0.222 & 0.352 & 0.433 \\ 0.196 & 0.233 & 0.278 & 0.383 \\ 0.116 & 0.48 & 0.263 & 0.167 \\ 0.502 & 0.065 & 0.107 & 0.017 \end{pmatrix}$$

$$27. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.181 & 0.179 & 0.272 & 0.253 \\ 0.189 & 0.275 & 0.278 & 0.263 \\ 0.189 & 0.275 & 0.373 & 0.277 \\ 0.441 & 0.271 & 0.077 & 0.207 \end{pmatrix}$$

$$28. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.186 & 0.225 & 0.352 & 0.433 \\ 0.196 & 0.233 & 0.278 & 0.383 \\ 0.316 & 0.45 & 0.263 & 0.167 \\ 0.302 & 0.092 & 0.107 & 0.017 \end{pmatrix}$$

$$29. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.081 & 0.379 & 0.272 & 0.353 \\ 0.089 & 0.275 & 0.278 & 0.263 \\ 0.089 & 0.275 & 0.373 & 0.277 \\ 0.741 & 0.071 & 0.077 & 0.107 \end{pmatrix}$$

$$30. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.386 & 0.222 & 0.352 & 0.433 \\ 0.196 & 0.233 & 0.278 & 0.383 \\ 0.316 & 0.48 & 0.263 & 0.167 \\ 0.102 & 0.065 & 0.107 & 0.017 \end{pmatrix}$$

3. Виробничі функції

3.1. Основні характеристики та види виробничих функцій

3.2. Середні та граничні показники

3.3. Еластичність економічних функцій

***Мета практичної роботи:** ознайомитися з виробничими функціями та їхніми характеристиками, з основними показниками економічного аналізу, поняттям еластичності та навчитися обчислювати і досліджувати їх із використанням комп'ютерного програмного забезпечення.*

Основний теоретичний матеріал

3.1. Основні характеристики та види виробничих функцій

Виробничими функціями називаються співвідношення між матеріальними благами та трудовими ресурсами, що використовуються у виробництві (які в сукупності називаються виробничими ресурсами) та продукцією, що випускається.

Результат процесу виробництва складається під впливом багаточисельних і різноманітних факторів. Кількісний аналіз дозволяє в кожному конкретному випадку встановити, які саме фактори впливають на результат виробництва. Мета побудови виробничих функцій – кількісно оцінити, виміряти характер і ступінь такого впливу.

В складних умовах економічної дійсності результат процесу виробництва визначається дією великої кількості факторів – економічних, технічних, соціальних, природних. Спроба в межах виробничої функції врахувати вплив усіх цих факторів – недосяжна задача, тим більше, що деякі з них не можуть бути описані кількісно, а вплив інших дуже малий. Тому у виробничу функцію потрібно прагнути вкласти лише головні фактори, які чинять найбільшу дію на показник, що вивчається.

З врахуванням змісту залежності, що вивчається, мети та задач дослідження використовуються різноманітні форми виробничих функцій. Частіше всього будуються багатофакторні виробничі функції, які мають загальний вид $y = f(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_m)$, де y – результативний показник (випуск продукції, дохід тощо.), $x_1, \dots, x_n$ – показники-фактори (витрати праці, засобів виробництва тощо), $a_1, \dots, a_m$ – параметри, які визначають структуру виробничої функції. Багатофакторні виробничі функції можуть бути лінійними та нелінійними.

Виробничі функції, які враховують фактор часу називаються динамічними, в протилежному випадку – статичними.

Для визначення основних математичних характеристик виробничих функцій та виявлення їхньої економічної інтерпретації розглянемо двофакторну виробничу функцію

$$Y = F(K, L), \quad (3.1.)$$

де через K і L відповідно можуть бути позначені об'єми основного капіталу і трудових ресурсів, а через Y – об'єм випущеної продукції.

Як правило, від виробничих функцій вимагають, щоб вони мали наступні властивості, які мають економічне обґрунтування:

1. $F(0, L) = F(K, 0) = 0$;
2. $\frac{\partial F}{\partial K} > 0, \frac{\partial F}{\partial L} > 0$;
3. $\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} \leq 0; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} \leq 0$;
4. $\frac{\partial^2 F}{\partial K \partial L} \geq 0; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial L \partial K} \geq 0$;
5. $F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L)$

Властивість 1 означає, що при відсутності хоча б одного ресурсу немає випуску.

Властивість 2 означає, що зі збільшенням витрат одного ресурсу при незмінній кількості другого об'єм випуску зростає.

З властивості 3 випливає, що зі збільшенням витрат одного ресурсу при незмінній кількості другого величина приросту випуску не зростає (закон спадаючої ефективності).

Властивість 4 означає, що при зростанні одного ресурсу гранична ефективність другого не зменшується.

Виконання властивостей 3,4 забезпечує угнутість функції (3.1).

З властивості 5 випливає, що виробнича функція є однорідна функція степені $r > 0$. При $r > 1$ зі зростанням масштабу виробництва в λ^r разів, ($\lambda > 1$) об'єм випуску (виробництва) збільшиться в λ^r разів, тобто маємо зростання ефективності виробництва в залежності від зростання масштабів виробництва. При $r < 1$ маємо падіння ефективності виробництва від зростання його масштабів. Коли $r = 1$ маємо постійну ефективність.

Лінії рівня виробничої функції називаються ізоквантами. Вони показують, як змінюються поєднання ресурсів (K, L) , необхідних для отримання фіксованих об'ємів випуску продукції.

Відношення Y/K та Y/L називаються середніми продуктивностями ресурсів (капіталу та праці).

Поряд з середніми показниками важливу роль відіграють граничні (маржинальні) продуктивності ресурсів dY/dK та dY/dL , які показують скільки додаткових одиниць продукції приносить одна (достатньо мала) одиниця витраченого ресурсу. Середні та граничні продуктивності ресурсів є розмірними величинами, які пов'язані з абсолютними приростами. Поряд з ними цікаво знати величини, які характеризують відсоток приросту продукції при збільшенні витрат ресурсів на 1%. Такі показники називаються коефіцієнтами еластичності і визначаються за формулами

$$e_K = \frac{dY}{dK} \frac{K}{Y}, \quad e_L = \frac{dY}{dL} \frac{L}{Y}, \quad (3.2)$$

тобто дорівнюють відношенню граничних продуктивностей ресурсів до середніх значень.

Для характеристики наслідків змін масштабу виробництва уводиться показник еластичності виробництва, який в загальному випадку визначається за формулою: $e = e_K + e_L$. Цей показник характеризує відсоткову зміну випуску продукції при зміні масштабу виробництва на 1%.

Особливістю реальних процесів виробництва є можливість заміни одного фактору виробництва іншим. Необхідність такої заміни може бути пов'язана з тим, що той чи інший ресурс є дефіцитним. Нехай об'єм L другого ресурсу зменшився на величину ΔL . На скільки (ΔK) потрібно збільшити об'єм K першого, щоб випуск Y не змінився? Враховуючи, що Y константа (тобто всі набори ресурсів знаходяться на одній ізокванті), перший повний диференціал виробничої функції дорівнює нулю

$$dY = \frac{\partial F}{\partial K} dK + \frac{\partial F}{\partial L} dL = 0$$

Звідси величина

$$S_{LK} = -\frac{\partial K}{\partial L} = \frac{\frac{\partial F}{\partial L}}{\frac{\partial F}{\partial K}} \quad (3.3.)$$

називається граничною нормою заміни другого ресурсу L першим ресурсом K . Очевидно, що $S_{LK} S_{KL} = 1$.

З формул (3.2), (3.3) для двофакторної виробничої функції випливає

$$S_{LK} = \frac{e_L}{e_K} \frac{K}{L} \quad (3.4.)$$

Для кількісної характеристики величини заміни граничної норми заміни S_{LK} уздовж ізокванти використовується поняття еластичності заміни ресурсів

$$\sigma_{LK} = \frac{d\left(\frac{K}{L}\right)}{dS_{LK}} \frac{S_{LK}}{\frac{K}{L}}. \quad (3.5.)$$

Економічний зміст еластичності заміни ресурсів наступний – вона приблизно показує, на скільки відсотків повинно змінитись відношення

ресурсів при русі уздовж ізокванти, щоб при цьому гранична норма заміни S_{LK} змінилась на 1%.

Розглянемо типові виробничі функції, що застосовуються для аналізу виробничої діяльності по визначеній технології, яка потребує строго фіксованих пропорцій витрат різних ресурсів (взаємозаміна ресурсів відсутня). В цьому випадку рівень витрат ресурсів змінюється пропорційно зміні об'єму виробництва, тобто

$$K = aY, \quad L = bY, \quad \frac{K}{L} = \frac{a}{b} = \text{const} \quad (3.6)$$

Для того, щоб від вигляду (3.6) перейти до звичного запису виробничої функції (3.1), зауважимо, що наведена постановка задачі базується на тому, що якщо згадані пропорції не виконуються, то надлишок першого (K) або другого (L) ресурсів не приводить до збільшення об'єму виробництва Y. Звідси випливає, що виробнича функція Y може бути записана у вигляді

$$Y = \min\left(\frac{K}{a}, \frac{L}{b}\right), \quad (3.7)$$

а її ізокванти зображені на рис 3.1.

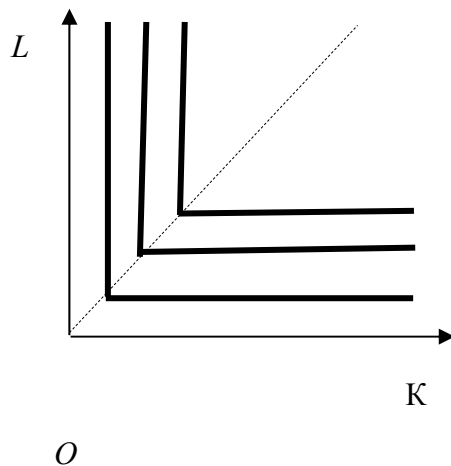


Рис. 3.1

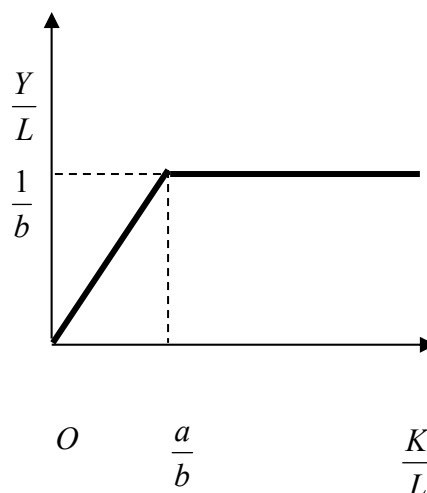


Рис. 3.2

Пунктирна пряма лінія визначає раціональні пропорції між ресурсами, які випливають із співвідношень (3.6), (3.7), а саме $K/a = L/b$. Функції (3.7) називають виробничими функціями з постійними пропорціями.

Із самої постановки задачі випливає, що еластичність заміни ресурсів для виробничої функції (3.7) $\sigma_{LK}=0$.

Якщо функцію (3.7) привести до вигляду

$$\frac{Y}{L} = \min\left(\frac{K}{aL}, \frac{1}{b}\right),$$

то кількість змінних зменшиться до однієї і її можна зобразити графічно (рис. 3.2). Якщо K і L – об'єми капіталу та трудових ресурсів, то виробництво в розрахунку на одного робітника зростає, доки капітал, який приходить на одного робітника зростає до заданої пропорції. Після цього виробництво в розрахунку на одного робітника перестане зростати внаслідок нестачі робочої сили.

З виразу (3.7), коли $K/a > L/b$, маємо $Y = L/b$, тому граничні продуктивності ресурсів

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial L} = \frac{1}{b}$$

Звідси та із співвідношень (3.2) випливає, що еластичність ресурсів $e_K=0$, $e_L = 1$. Аналогічно, коли $K/a < L/b$, $e_K = 1$, $e_L = 0$. Отримані результати показують, що для ресурсу, який стримує виробництво, гранична та середні ефективності рівні між собою та еластичність випуску дорівнює 1, по другому ресурсу гранична ефективність дорівнює нулю, еластичність випуску по цьому ресурсу також дорівнює нулю.

До найпростіших виробничих функцій відносяться також лінійні функції

$$Y = a_0 + a_1 K + a_2 L \quad (a_0 \geq 0, a_1 > 0, a_2 > 0), \quad (3.8)$$

ізокванти яких являють собою паралельні прямі (рис. 3.3)

Властивості 1;5 для функції (3.8), коли $a_0 > 0$ порушуються – виробництво може здійснюватись при наявності одного з ресурсів, а сама функція перестає бути однорідною.

Використовуючи відповідні формули, які наведені вище, визначимо середні, граничні продуктивності ресурсів та їх еластичності

$$\frac{Y}{K} = a_1 + \frac{a_0 + a_2 L}{K}, \quad \frac{Y}{L} = a_2 + \frac{a_0 + a_1 K}{L}, \quad \frac{\partial Y}{\partial K} = a_1, \quad \frac{\partial Y}{\partial L} = a_2$$

$$e_K = \frac{a_1 K}{a_0 + a_1 K + a_2 L}, \quad e_L = \frac{a_2 L}{a_0 + a_1 K + a_2 L}$$

Гранична норма заміни ресурсу L ресурсом K згідно формули (3.3) або (3.4) дорівнює постійній величині: $S_{LK} = a_2/a_1$, тобто виробнича функція (3.8) характеризується постійною нормою зміни, яка не залежить від об'ємів і співвідношення ресурсів. Звідси та із співвідношення (3.5) випливає, що еластичність заміни для лінійної виробничої функції необмежена ($\sigma_{LK}=\infty$): ресурси можуть в постійній пропорції замінювати один одного без усяких обмежень. Навіть, коли об'єм одного ресурсу дорівнює нулю, можна отримати будь-яку величину випуску за рахунок збільшення витрат другого ресурсу. В зв'язку з цим лінійні виробничі функції, порівняно рідко, використовуються для моделювання реальних залежностей.

Розглянемо тепер степеневі виробничі функції, які використовуються для моделювання широкого класу економічних систем. Вони були запропоновані в кінці 20-х років двадцятого століття двома американськими економістами К.Коббом і П.Дугласом для знаходження зв'язку між об'ємом суспільного продукту та двома найважливішими ресурсами – трудовими та основними виробничими фондами. У випадку двох факторів вони мають вигляд:

$$Y = a_0 K^{a_1} L^{a_2}, \quad (3.9)$$

де a_0, a_1, a_2 – додатні параметри, крім того, як правило, $a_1, a_2 < 1$. Легко перевірити, що функція (3.9) задовольняє всім властивостям 1-5. Її ізокванти зображені на рис. 3.3, коли $K \rightarrow \infty$ вони наближаються до осі ОК, а при $L \rightarrow \infty$ – до осі OL. З цього випливає, що одним виробничим ресурсом можна компенсувати яку завгодно недостатність другого ресурсу.

Використовуючи відповідні вищенаведені формули для характеристик виробничих функцій, легко визначити середні, граничні продуктивності ресурсів та їх еластичності для функції Кобба-Дугласа

$$\frac{Y}{K} = a_0 K^{a_1-1} L^{a_2}, \quad \frac{Y}{L} = a_0 K^{a_1} L^{a_2-1},$$

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = a_0 a_1 K^{a_1-1} L^{a_2}, \quad \frac{\partial Y}{\partial L} = a_0 a_2 K^{a_1} L^{a_2-1}, \quad e_K = a_1, \quad e_L = a_2$$

Еластичність виробництва $e = e_1 + e_2 = a_1 + a_2$. При $a_1 + a_2 > 1$ маємо зростаючу, при $a_1 + a_2 = 1$ – постійну, а при $a_1 + a_2 < 1$ – спадаючу віддачу від збільшення масштабів виробництва.

Гранична норма заміни ресурсу L ресурсом K згідно формул (3.3),

$$S_{LK} = \frac{a_1}{a_2} \frac{K}{L} \quad (3.10)$$

(3.4) є лінійною функцією відношення об'ємів ресурсів.

Лінії, які з'єднують на графіку точки з однаковою граничною нормою заміни ресурсів називаються ізокліналіями. У випадку виробничої функції Кобба-Дугласа, як це випливає з (3.10), ізокліналіями є прямі лінії, які проходять через початок координат, причому

$$S^1_{LK} < S^2_{LK} < S^3_{LK}, \quad S^i_{LK} = \text{const} > 0.$$

Використовуючи формулу (3.5), легко обчислити, що еластичність заміни $\sigma_{LK} = 1$. Останнє разом з необмеженою можливістю компенсації одного ресурсу іншим накладає певні обмеження щодо використання виробничих функцій Кобба-Дугласа для Економіко-математичне моделювання. В розглянутих вище виробничих функціях з постійними пропорціями (3.7), лінійних (3.8) еластичності заміни ресурсів відповідно дорівнюють нулеві та нескінченості. Часто економічні міркування підказують, що хоча еластичність заміни ресурсів і можна вважати постійною, згаданих величин (нуль, одиниця, нескінченність) недостатньо.

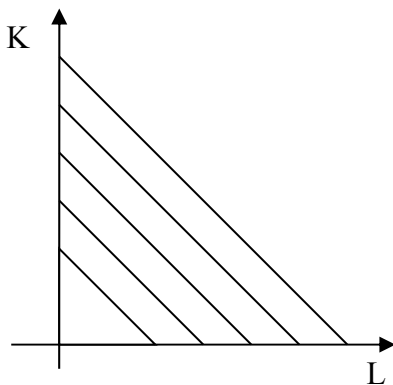
У зв'язку з цим виникає інтерес щодо можливості побудови виробничої функції з постійною еластичністю заміни в більш широкому інтервалі. Така функція була запропонована на початку шестидесятих

років двадцятого сторіччя американськими економістами Ерроу, Ченері, Мінхасом і Солоу для обробки статистичних спостережень, для яких еластичність заміни згідно вимірюванням була відмінною від одиниці. У випадку двох змінних клас таких функцій з постійною еластичністю заміни (CES- функцій, від англійської назви Constant Elasticity of Substitution) має вигляд:

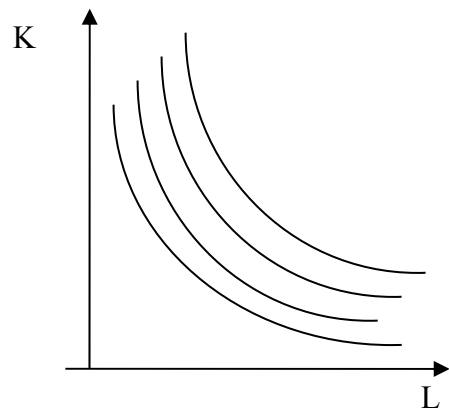
$$Y = A(\alpha_1 K^{-\rho} + \alpha_2 L^{-\rho})^{-\frac{r}{\rho}}, \quad (3.11)$$

де $A > 0$, $\rho > 0$, $r > 0$, $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ (часто додатково покладають, що $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$).

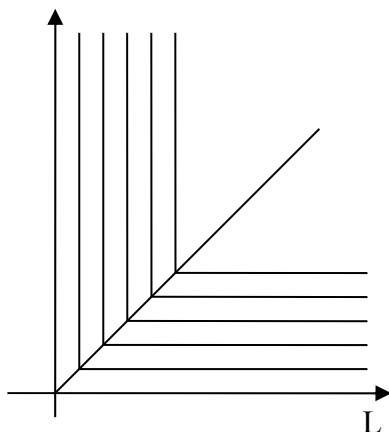
На відміну від функції Кобба-Дугласа (рис. 3.3) CES-функція не прямує до нескінченості, коли $K \rightarrow \infty$, а обмежена асимптотою $Y = A\alpha_2^{-\frac{r}{\rho}} L^r$



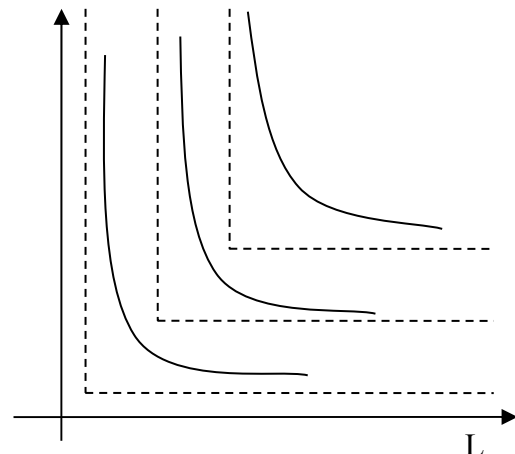
Функція $Y = aK + bL + c$
(лінійна)



Функція $Y = AK^\alpha L^\beta$
(Кобба-Дугласа)



Функція $Y = \min(aK, bL)$
(Леонтьєва)



Функція CES

Рис. 3.3. Лінії рівня (ізокванти) основних виробничих функцій

Для аналізу властивостей заміни ресурсів побудуємо ізокванту CES-функції. Якщо покласти в (3.11) $Y=Y_0=\text{const}$, то після нескладних перетворень рівняння ізокванти матиме вигляд:

$$L = \left[\frac{1}{\alpha_2} \left(\left(\frac{Y_0}{A} \right)^{-\frac{p}{r}} - \alpha_1 K^{-p} \right) \right]^{-\frac{1}{p}}$$

Ця ізокванта при $K \rightarrow \infty$ та $L \rightarrow \infty$ має відповідні асимптоти

$$L = \left(\frac{Y_0}{A} \right)^{\frac{1}{r}} \alpha_2^{\frac{1}{p}}$$

$$\text{та } K = \left(\frac{Y_0}{A} \right)^{\frac{1}{r}} \alpha_1^{\frac{1}{p}}$$

Це означає, що при необмеженому зростанні кількості першого ресурсу для випуску продукції в об'ємі Y_0 необхідно мати другого ресурсу в кількості, яка більша за

$$\left(\frac{Y_0}{A} \right)^{\frac{1}{r}} \alpha_2^{\frac{1}{p}}$$

Аналогічна ситуація складається при забезпеченні кількості другого ресурсу.

Якщо взяти перші частинні похідні від функції (3.11) по K і L , то після нескладних перетворень отримаємо формулу для визначення граничних ефективностей ресурсів та їх еластичностей:

$$\frac{dY}{dK} = \frac{r\alpha_1 K^{-(p+1)}}{\alpha_1 K^{-p} + \alpha_2 L^{-p}} Y, \quad \frac{dY}{dL} = \frac{r\alpha_2 L^{-(p+1)}}{\alpha_1 K^{-p} + \alpha_2 L^{-p}} Y$$

(3.12)

$$e_K = \frac{r\alpha_1 K^{-p}}{\alpha_1 K^{-p} + \alpha_2 L^{-p}}, \quad e_L = \frac{r\alpha_2 L^{-p}}{\alpha_1 K^{-p} + \alpha_2 L^{-p}}$$

Таким чином, для функції CES коефіцієнти ресурсів, на відміну від попередніх функцій, вже не є постійні величини. Зменшення кількості одного ресурсу при фіксованій витраті іншого приводить до збільшення

еластичності першого до величини γ , необмежене збільшення – до падіння еластичності до нуля. Тому відношення граничної ефективності ресурсу до його середньої ефективності спадає при зростанні об'єму ресурсу, який використовується.

Із співвідношень (3.12) випливає, що еластичність виробництва $\epsilon = \gamma$. З цього випливає економічний зміст параметру γ : він характеризує віддачу від збільшення масштабів виробництва.

Підставляючи граничні ефективності ресурсів (3.12) у формулу (3.4.), отримаємо граничну норму заміни ресурсу L ресурсом K :

$$S_{LK} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left(\frac{K}{L} \right)^{p+1} \quad (3.13)$$

тобто вона залежить, як і у випадку функції Кобба-Дугласа, від співвідношення ресурсів, а ізокліналії є прямі лінії.

З використанням співвідношень (3.5), (3.13), знаходимо формулу для еластичності заміни ресурсів:

$$\sigma_{LK} = \frac{1}{1+p} \quad (3.14)$$

Таким чином CES-функції, мають постійну еластичність заміни, яка на відміну від попередніх виробничих функцій змінюється в залежності від параметру p від одиниці (коли $p=0$) до нуля (коли $p \rightarrow \infty$).

Коли $p \rightarrow 0$ CES-функція прямує до функції Кобба-Дугласа з $\sigma_{LK} = 1$, коли $p \rightarrow \infty$, $\sigma_{LK} \rightarrow 0$, отримаємо функцію з постійними пропорціями Леонтьєва.

Нарешті, коли взяти $p \rightarrow -1$, то $\sigma_{LK} \rightarrow \infty$. В цьому випадку з (3.11)

$$Y = A(\alpha_1 K + \alpha_2 L)^r$$

маємо:

При $r=1$ отримаємо лінійну однорідну функцію.

Отже, виходячи з вищевикладеного, можна вважати, що CES-функції є узагальненням попередніх виробничих функцій, що розглядались.

3.2. Середні та граничні показники

Змінні в економічному аналізі називають показниками. В економіці широко використовуються середні значення: середня продуктивність, середній прибуток, середні витрати й ін. Однак за допомогою середніх показників не можна визначити, який вплив на результат діяльності (прибуток, об'єм виробництва й ін.) робить зміна одного з показників. Тут варто аналізувати приріст змінних, тобто застосовувати методи диференціального числення.

Граничний виторг визначається як похідна повного виторгу $R = R(Q)$ по кількості товару Q , тобто він дорівнює швидкості зміни виторгу при зміні об'єму продажів.

Середній виторг – це виторг на одиницю продажів

$$R_{\bar{n}\partial} = \frac{R(Q)}{Q}.$$

Якщо $R(Q) = PQ$ де P – ціна одиниці товару, то $R_{\bar{n}\partial} = \frac{R(Q)}{Q} = P$, тобто середній виторг дорівнює ціні одиниці продукції.

Цілком аналогічно визначаються граничні і середні показники для інших економічних функцій.

Середні і граничні витрати: $C_{\bar{n}\partial} = \frac{C(Q)}{Q}$, $C'(Q) = \frac{dC(Q)}{dQ}$, де $C(Q)$ – функція витрат.

Середня і гранична продуктивність: $Q_{\bar{n}\partial} = \frac{Q(L)}{L}$, $Q'(L) = \frac{dQ(L)}{dL}$, де $Q(L)$ – виробнича функція, що описує залежність об'єму виробленої продукції Q від кількості вкладеної праці L .

Середня і гранична схильність до споживання

$C_{\bar{n}\partial} = \frac{C(Y)}{Y}$, $C'(Y) = \frac{dC(Y)}{dY}$, де $C(Y)$ – функція споживання, що описує залежність об'єму споживання C від національного доходу Y .

Середня і гранична схильність до заощадження:

$$S_{\text{н\ddot{o}}} = \frac{C(Y)}{Y}, \quad S'(Y) = \frac{dS(Y)}{dY}, \quad \text{де } S(Y) - \text{функція заощаджень, що описує}$$

залежність об'ємів капіталовкладень S від національного доходу Y .

3.3. Еластичність економічних функцій

Еластичність – це безрозмірна величина, що показує спроможність функції реагувати на зміну аргументу. *Еластичністю функції в точці* називається межа відношення відсоткової зміни функції до відсоткової зміни аргументу, яка цю зміну викликала, тобто

$$E_f = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta f}{f} 100\% \right) : \left(\frac{\Delta x}{x} 100\% \right).$$

Еластичність можна визначити через середні і граничні величини

$$E_f = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta f}{f} 100\% \right) : \left(\frac{\Delta x}{x} 100\% \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot \frac{x}{f(x)} = f'(x) \frac{x}{f(x)} = \frac{f'(x)}{f_{cp}(x)}$$

або як логарифмічну похідну

$$E_f = \frac{d \ln f(x)}{d \ln x},$$

оскільки

$$d \ln f(x) = \frac{df(x)}{f(x)} \quad \text{і} \quad d \ln x = \frac{dx}{x}.$$

Для функції, заданої на кінцевій множині значень X_i , розглядають *кінцеву (відсоткову) еластичність*:

$$E_y = \frac{\frac{y_2 - y_1}{y_1} \cdot 100\%}{\frac{x_2 - x_1}{x_1} \cdot 100\%}.$$

Еластичність попиту за ціною визначається рівностями:

$$E_D = \frac{\frac{dD}{D}}{\frac{dP}{P}} = \frac{dD}{dP} \cdot \frac{P}{D} = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q} = \frac{P}{Q} \cdot \frac{1}{\frac{dP(Q)}{dQ}},$$

де $D = D(P)$ – функція попиту.

Нагадаємо, що функція попиту $D = D(P)$ – спадна функція, отже, еластичність E_D від’ємна (точніше, недодатна) і аналізується величина $|E_D|$.

Залежно від значень $|E_D|$ розрізняють товари *еластичного* і *нееластичного* попиту. Якщо $|E_D| > 1$, тобто відносне підвищення ціни на 1% приводить до відносного падіння попиту більш ніж на 1%, і навпаки, падіння ціни на 1% приводить до збільшення попиту більш ніж на 1%, то говорять про товар *еластичного попиту*. У протилежному випадку, коли $|E_D| \leq 1$, товар називають товаром *нееластичного попиту*.

Існує зв’язок між граничним виторгом і еластичністю попиту за ціною.

Як уже відзначалося вище, сумарний виторг $R(Q)$ обчислюється за формулою $R(Q) = QP(Q)$ де $P(Q)$ – функція ціни, Q – кількість одиниць товару. Тоді граничний виторг $R'(Q)$ можна виразити через

$$R'(Q) = \frac{d}{dQ}(QP(Q)) = p + Q \frac{dP}{dQ} = P \left(1 - \frac{1}{|E_D|} \right).$$

Рівність $R'(Q) = P \left(1 - \frac{1}{|E_D|} \right)$ справедлива для будь-якої функції $P(Q)$.

Звідси випливає, що при реалізації товарів нееластичного попиту ($|E_D| \leq 1$) граничний виторг від’ємний і сумарний виторг падає; якщо ж попит на товар еластичний ($|E_D| > 1$), то граничний виторг додатний і, отже, сумарний виторг зростає. Справедливе твердження: для товарів еластичного попиту сумарний виторг – зростаюча функція.

Еластичність пропозиції за ціною визначається рівностями

$$E_S = \frac{\frac{dS}{S}}{\frac{dP}{P}} = \frac{dS}{dP} \cdot \frac{P}{S} = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q},$$

де $S = S(P)$ – функція пропозиції. Функція пропозиції $S = S(P)$ зростаюча, еластичність E_S невід’ємна, і аналізується величина E_S .

Приклади розв'язання задач

3.1. Обчисліть граничну та середню продуктивності праці для виробничої функції $y = 3\sqrt[3]{x^2}$ та побудуйте їхні графіки.

Розв'язання

Фрагмент робочого документа Mathcad із відповідними обчисленнями і коментарями наведено нижче.

Задамо виробничу функцію

$$y(x) := 3 \cdot \sqrt[3]{x^2}$$

Знайдемо середню продуктивність праці

$$y_{av}(x) := \frac{y(x)}{x}$$

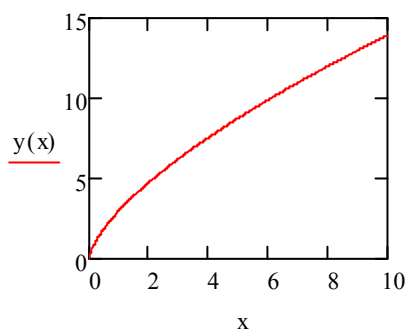
$$y_{av}(x) \rightarrow \frac{3}{\frac{1}{x^3}}$$

Знайдемо граничну продуктивність праці

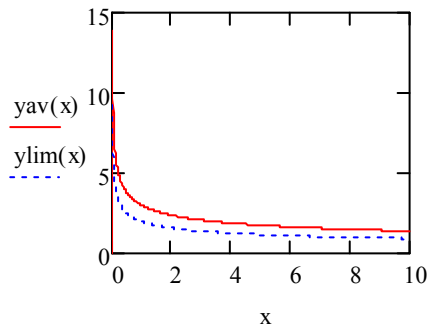
$$y_{lim}(x) := \frac{d}{dx} y(x)$$

$$y_{lim}(x) \rightarrow \frac{2}{\frac{1}{x^3}}$$

Графік виробничої функції має вигляд



Графіки середньої та граничної продуктивності праці наведемо на одному малюнку



3.2. Знайдіть для заданої функції попиту $P = -0.1Q^2 + 0.6Q + 0.7$ еластичність E_D попиту за ціною та сумарний і граничний виторг. Побудуйте графіки еластичності E_D , граничного і сумарного виторгу. Знайдіть значення Q і відповідну ціну, при якій $|E_D| = 1$. Сформулюйте висновки.

Розв'язання

Фрагмент робочого документа Mathcad із відповідними обчисленнями і коментарями наведено нижче.

Введемо функцію попиту

$$P(Q) := \frac{-Q^2}{10} + \frac{3}{5} \cdot Q + \frac{7}{10}$$

Знайдемо еластичність попиту за ціною

$$ED(Q) := \frac{P(Q)}{Q} \cdot \frac{1}{\left(\frac{d}{dQ} P(Q) \right)}$$

$$ED(Q) \rightarrow -\frac{\frac{3 \cdot Q}{5} - \frac{Q^2}{10} + \frac{7}{10}}{Q \cdot \left(\frac{Q}{5} - \frac{3}{5} \right)}$$

Задамо функцію сумарного виторгу

$$R(Q) := Q \cdot P(Q)$$

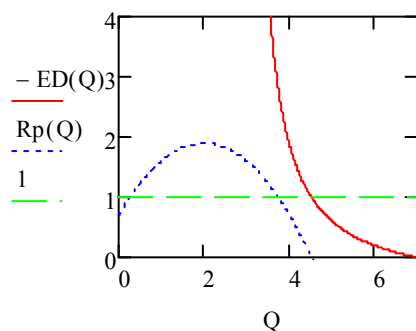
$$R(Q) \rightarrow Q \cdot \left(\frac{3 \cdot Q}{5} - \frac{Q^2}{10} + \frac{7}{10} \right)$$

Знайдемо граничний виторг

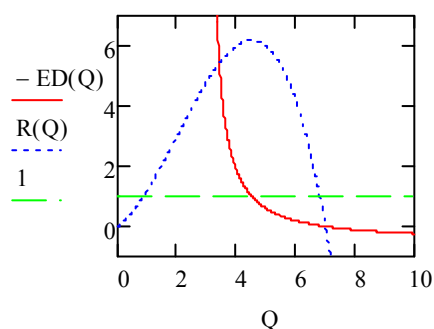
$$Rp(Q) := \frac{d}{dQ} R(Q)$$

$$Rp(Q) \rightarrow \frac{3 \cdot Q}{5} - \frac{Q^2}{10} - Q \cdot \left(\frac{Q}{5} - \frac{3}{5} \right) + \frac{7}{10}$$

Побудуємо графік еластичності (точніше – $ED(Q)$, оскільки $ED(Q) < 0$) та граничного виторгу



Побудуємо графік еластичності та сумарного виторгу



Знайдемо значення Q , для якого $|E_D| = 1$

$$-ED(Q) = 1 \text{ solve } \rightarrow \left(\frac{\sqrt{57}}{3} + 2, 2 - \frac{\sqrt{57}}{3} \right)$$

Оскільки значення Q , не може бути від'ємним, тому

$$Q := \frac{\sqrt{57}}{3} + 2$$

$$Q = 4.517$$

Відповідне значення ціни дорівнює

$$P(Q) = 1.37$$

Графіки підтверджують висловлені вище твердження про зв'язок еластичності попиту за ціною з граничним і сумарним виторгом. У документі показане символічне обчислення значення Q , при котрому $|E_D| = 1$ (знайдене рішення рівняння $-E_D = 1$), і обчислення відповідного значення ціни $P = P(Q)$. Досліджуваний товар є товаром еластичного попиту, і сумарний виторг від його реалізації зростає, коли ціна товару не перевищує розміру $P = 1,37$. При такій ціні досягається максимум сумарного виторгу.

Завдання для самостійної роботи

3.1. Обчисліть середні і граничні показники для заданої виробничої функції $y = a(bx)^{m/n}$

№	a	b	m	n
1	2	2.2	4	5
2	3	3.3	3	4
3	4	4.4	4	5
4	5	5.5	3	4
5	4	6.7	4	5
6	3	7.6	3	4
7	2	5.4	4	5
8	1	4.5	3	4
9	0.9	2.9	4	5
10	1.9	3.0	3	4
11	1.1	2	3	4
12	2.3	3	2	3
13	3.4	4	3	4
14	4.5	5	2	3
15	5.6	4	3	4
16	6.5	3	2	3
17	5.5	2	3	4
18	7.4	1	2	3
19	4.7	0.9	3	4
20	3.3	1.9	2	3
21	2.1	3	3	4
22	1.3	4	2	3
23	2.4	2	3	4
24	3.5	3	2	3
25	4.6	5	3	4
26	5.5	2	2	3
27	6.5	3	3	4
28	3.4	2	2	3
29	5.7	1.9	3	4
30	6.3	0.9	2	3

3.2. Знайдіть для заданої функції попиту $P(Q) = -aQ^2 + bQ + c$ еластичність E_D попиту за ціною і відповідний граничний виторг. Побудуйте графіки еластичності E_D і граничного виторгу. Знайдіть значення Q і відповідну ціну, при якій $|E_D| = 1$. Сформулюйте висновки.

№	a	b	c
1	1/15	0.5	0.7
2	1/15	4/7	0.7
3	1/15	4/9	0.7
4	1/15	5/7	0.7
5	1/15	5/9	1
6	1/15	5/9	0.8
7	1/15	5/9	0.5
8	1/15	5/9	0.6
9	0.1	5/9	1
10	0.1	5/9	0.8
11	0.1	6/7	0.3
12	0.1	6/7	0.5
13	0.1	6/7	0.7
14	0.1	6/7	1
15	2/15	6/7	1
16	2/15	6/7	0.9
17	2/15	6/7	0.8
18	2/15	6/7	0.7
19	2/15	6/7	0.5
20	2/15	6/7	0.3
21	0.2	4/7	0.3
22	0.3	2/7	0.5
23	0.2	5/7	0.7
24	0.2	3/7	1
25	4/15	6/9	1
26	5/15	6/7	0.9
27	2/15	5/7	0.8
28	1/15	4/7	0.7
29	3/15	3/7	0.5
30	6/15	8/7	0.3

3.3. Для виробничої функції Кобба-Дугласа знайти:

1) середні та граничні (маржинальні) продуктивності ресурсів (факторів виробництва) x_1 , x_2 і порівняти їх;

2) частинні еластичності випуску по кожному ресурсу та еластичність виробництва;

3) граничні норми заміни одного ресурсу іншим.

Дані	Варіанти									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_0	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4
a_1	0,25	0,31	0,36	0,25	0,7	0,16	0,35	0,34	0,41	0,26
a_2	0,75	0,65	0,61	0,76	0,25	0,84	0,65	2,13	0,91	0,74
x_1	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0
x_2	3,0	2,8	2,6	2,4	2,2	2,0	1,8	1,6	1,4	1,2

4. Економічна динаміка та її моделювання

4.1. Функції попиту та пропозиції.

4.2. Показники економічної динаміки.

4.3. Поняття динамічної рівноваги в економіці. Павутиноподібна модель ринку.

***Мета практичної роботи:** ознайомитися з поняттями функцій попиту та пропозиції, динамічної рівноваги в економіці, з павутиноподібною моделлю ринку, дослідити функції попиту та пропозиції та навчитися знаходити рівноважну ціну, об'єми випуску та темпи приросту продукції із застосуванням комп'ютерних технологій.*

Основний теоретичний матеріал

4.1. Функції попиту та пропозиції

Мікроекономіка, як відомо, займається аналізом окремих елементів економічної системи. Один із найважливіших розділів економіки – вивчення попиту і пропозиції. Попит на деякі товари – це потреба у визначеній кількості товару, обмежена діючими цінами і платоспроможністю (доходами) споживачів. Пропозиція – це кількість товару, що може бути подана для продажу по даній ціні.

Здоровий глузд підказує: збільшення випуску вимагає додаткових витрат і, для того щоб зацікавити виробника у збільшенні випуску, потрібно запропонувати йому підвищену ціну. Звідси випливає, що пропозицію S потрібно розглядати як зростаючу функцію ціни P . Якщо пропозиція залежить від ціни, то і ціна залежить від пропозиції. Економісти звичайно саме функцію $P = S(Q)$ називають функцією пропозиції, а її графік – кривою пропозиції; тут Q – кількість товару, запропонованого для продажу за ціною P .

Той же здоровий глузд підказує: якщо ціна на визначений товар починає зростати, то кількість проданого товару буде зменшуватись, тобто залежність попиту D від ціни P – спадна функція. Економісти називають функцією попиту функцію $P = D(Q)$, а її графік – кривою попиту, тут Q – кількість товару, придбаного споживачами за ціною P .

Хоча будь-яке припущення про вигляд функціональних залежностей $S(Q)$ і $D(Q)$ буде спрощенням дійсності, дослідження цих функцій дозволяє частково «оцінити» реальну ситуацію. Таким чином, аналізуючи модель, можна оцінювати та прогнозувати зміну досліджуваних величин. Чим ближче модель до реальності, тим, взагалі кажучи, вона складніше і тим більше точними можуть виявитися прогнози й оцінки.

4.2. Показники економічної динаміки

Показники, що характеризують динаміку економічного об'єкту – це абсолютні прирости, темпи росту та приросту.

Якщо розглядається залежна від часу величина $A(t)$, то абсолютний приріст від моменту 0 до моменту 1 дорівнює $\Delta A(t) = A(1) - A(0)$, дискретний темп росту $\eta_1 = \frac{A(1)}{A(0)}$, дискретний темп приросту $\alpha_1 = \eta_1 - 1 = \frac{A(1) - A(0)}{A(0)}$.

Якщо темп приросту α не змінюється протягом часу, то динаміка показника $A(t)$ може бути описана як $A(t) = A(0) \cdot (1 + \alpha)^t$.

Якщо величина $A(t)$ є неперервною функцією часу, то ріст її з постійним темпом записується як $A(t) = A(0) \cdot e^{\lambda t}$, де λ – неперервний темп приросту, який в загальному вигляді розраховується як $\lambda(t) = \frac{d(A(t))}{A(t) \cdot dt}$ або

$\lambda(t) = \frac{A'(t)}{A(t)}$. При рості величини $A(t)$ з неперервним темпом приросту λ

дискретний темп росту $\frac{A(t+1)}{A(t)}$ дорівнює e^λ , що при малих значеннях λ

близьке до $1 + \lambda$, тобто до темпу росту при дискретному темпі приросту λ .

Розглянемо величини темпів приросту для суми і добутку показників.

Нехай показник $S(t)$ є сумою $A(t)$ і $B(t)$, які зростають відповідно, з постійними неперервними темпами α і β , причому $\alpha > \beta$. Тоді

$$S(t) = A(t) + B(t) = A(0) \cdot e^{\alpha t} + B(0) \cdot e^{\beta t} = A(0) \cdot e^{\alpha t} \cdot \left[1 + e^{(\beta-\alpha)t} \cdot \frac{B(0)}{A(0)} \right].$$

Оскільки $\beta - \alpha < 0$, величина в квадратних дужках прямує до одиниці, і темп приросту суми наближається до темпу складової, що швидше зростає, тобто до α .

Нехай величина $P(t)$ є добутком $A(t)$ і $B(t)$ з неперервними темпами приросту α і β . В цьому випадку

$$P(t) = A(t) \cdot B(t) = A(0) \cdot e^{\alpha t} \cdot B(0) \cdot e^{\beta t} = P(0) \cdot e^{(\alpha+\beta)t},$$

тобто темп приросту добутку дорівнює сумі темпів приросту співмножників. Якщо α і β – дискретні темпи приросту $A(t)$ і $B(t)$, то

$$P(t) = A(t) \cdot B(t) = A(0) \cdot (1 + \alpha)^t \cdot B(0) \cdot (1 + \beta)^t = P(0) \cdot (1 + \alpha + \beta + \alpha\beta)^t.$$

При малих значеннях α і β величина $\alpha\beta$ настільки мала, що нею можна знехтувати, тому темп приросту добутку наближено дорівнює сумі темпів приросту співмножників. Якщо ж добуток $\alpha\beta$ суттєвий, то темп приросту добутку не можна наближено вважати рівним сумі темпів приросту співмножників, оскільки значно її перевищує.

Зв'язок об'ємних і темпових величин легко можна продемонструвати на прикладі виробничої функції [1]. Нехай $Y(t)$, $K(t)$, $L(t)$ – об'ємні показники випуску, капіталу та праці (неперервні функції часу), а $y(t)$, $k(t)$, $l(t)$ – неперервні темпи їх приросту. Об'ємна виробнича функція з нейтральним технічним прогресом (при постійному темпі останнього, який дорівнює γ) має вигляд

$$Y(t) = f[K(t), L(t)]e^{\gamma t}.$$

Прологарифмуємо цю залежність

$$\ln Y(t) = \ln f[K(t), L(t)] + \gamma t.$$

Далі диференціюємо по часу

$$d \ln Y(t) = \frac{dY(t)}{Y(t)} = \frac{dY(t)}{dK(t)} \cdot \frac{K(t)}{Y(t)} \cdot \frac{dK(t)}{K(t)} + \frac{dY(t)}{dL(t)} \cdot \frac{L(t)}{Y(t)} \cdot \frac{dL(t)}{L(t)} + \gamma dt,$$

оскільки $y(t) = \frac{dY(t)}{Y(t) \cdot dt}$, то маємо

$$y(t) = \alpha(t)k(t) + \beta(t)l(t) + \gamma,$$

де $\alpha(t)$ і $\beta(t)$ – еластичності випуску по капіталу і праці відповідно.

Ця лінійна формула характеризує вклад темпів приросту факторів виробництва в загальні темпи приросту доходу, а показник γ характеризує вклад технічного прогресу.

4.3. Поняття динамічної рівноваги в економіці.

Павутиноподібна модель ринку

В економічній теорії важливим є поняття рівноваги, тобто такого стану об'єкта, який він зберігає при відсутності зовнішнього впливу. Задачі економічної динаміки включають як описання процесу вихода до стану рівноваги, так і процесів трансформації самого цього стану під дією зовнішніх сил. Розглянемо просту економічну систему в стані рівноваги і опишемо рух такої системи в неперервному та дискретному випадках. В першому випадку динаміка системи описується за допомогою диференціального рівняння, в другому – різницевого рівняння.

Диференціальне рівняння пов'язує зміну показника (нехай наша система описується одним показником $x(t)$, або просто x) з швидкістю його руху x'_t або x' . Будемо вважати, що швидкість зміни показника x пропорційне величині його відхилення від рівноважного значення x_e . Тобто, чим далі показник відхиляється від рівноважного значення, тим швидше він повернеться до нього. Якщо в рівнянні присутня тільки перша похідна x по часу, а сам зв'язок лінійний, то маємо лінійне диференціальне рівняння. Нехай воно, наприклад, має наступний вигляд $x' = k(x - x_e)$, де k - коефіцієнт. В цьому рівнянні kx_e - вільний член; без

нього рівняння $x' = kx$ називається однорідним і його загальний розв'язок $x = ce^{kt}$. Початкове неоднорідне рівняння має частинний розв'язок $x = x_e$ (якщо величина x знаходиться в стані рівноваги), а загальним його розв'язком є сума будь-якого частинного розв'язку і загального розв'язку однорідного рівняння, тобто $x = x_e + ce^{kt}$. Враховуючи, що при $t = 0$ величина x рівна $x(0)$, отримуємо $c = x(0) - x_e$ і $x(t) = x_e + (x(0) - x_e)e^{kt}$. Якщо $k < 0$, то $e^{kt} \rightarrow 0$ і рівновага стійка, тобто при відхиленні величини $x(t)$ від значення вона знов прямує до цього значення. При $k > 0$ величина $e^{kt} \rightarrow \infty$ і, відповідно, $x(t)$ прямує до нескінченності (якщо початковий стан не співпадає зі станом рівноваги). Система прямує до стану x_e (рис. 4.1.а). Її поведінка при $k > 0$ показана на рис 4.1.б. Поведінка динамічних систем може також описуватись, наприклад, графіками рис. 4.1.в-4.1.г.

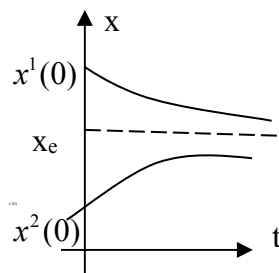


Рис. 4.1а

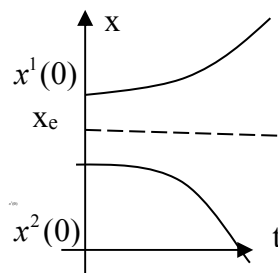


Рис. 4.1б

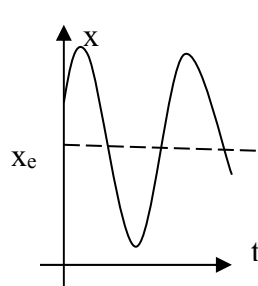


Рис. 4.1в

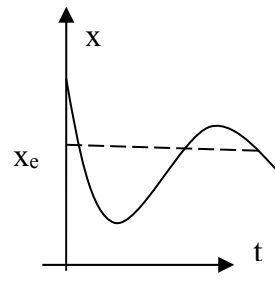
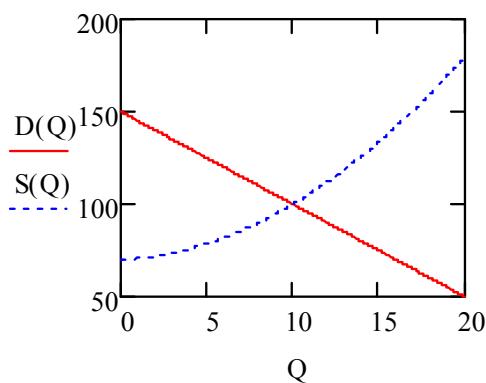


Рис. 4.1г

Поведінка в дискретному часі може бути описана за допомогою різницевого рівняння, яке пов'язує величини x в сусідні моменти часу, тобто x_t і x_{t-1} . Наприклад, в дискретному випадку, аналогічному вище

описаному, може використовуватися різницеве рівняння $x_t = x_{t-1} + k(x_{t-1} - x_e)$, розв'язком якого є $x_t = x_e + (x(0) - x_e)(1 + k)^t$. Цей розв'язок може бути знайдено (аналогічному неперервному випадку) як сума загального розв'язку $x_t = c(1 + k)^t$ для однорідного рівняння $x_t = (1 + k)x_{t-1}$ і частинного розв'язку $x_t = x(0)$ для початкового різницевого рівняння з урахуванням $x_t = x(0)$ при $t = 0$. При $k < 0$ система в випадку відхилення від x_e буде рухатися в напрямку x_e при $k > 0$ – віддаляється ще далі від нього. Рівновага стійка при $-2 < k < 0$ і нестійка при $k > 0$ або $k < -2$ (при $k < -1$ показник x кожен раз «перескакує» рівноважне значення x_e , при чому при $k < -2$ – занадто далеко, щоб наблизитися до x_e).

Деякі змістовні висновки про взаємний вплив показників можна зробити, досліджуючи поведінку графіків відповідних функцій. Подивимося, наприклад, на графіки функцій попиту $D(Q) = -5Q + 150$ і пропозиції $S(Q) = \frac{Q^2}{4} + \frac{Q}{2} + 70$.



Становить інтерес точка перетину кривих попиту і пропозиції. Ця точка називається точкою рівноваги, а відповідна їй ціна – рівноважною ціною. Перетин графіків при $P = 100$ означає, що при такій ціні весь вироблений товар розкуповується, попит і пропозиція збігаються. При цінах, нижчих рівноважної ($P < 100$), попит перевищує пропозицію, $D(Q) > S(Q)$, виникає «дефіцит» товару і виробники можуть підвищувати ціну, ринкова ціна буде прямувати до рівноважної. Якщо ж ціні вищі рівноважної ціни $P > 100$, то $D(Q) < S(Q)$, пропозиція перевищує попит,

залишається нереалізована продукція, що спонукає виробників знижувати ціну, і ринкова ціна буде прямувати до рівноважної. Така модель називається павутиноподібною (рис. 4.2.). Слід зауважити, тут розглянута дуже спрощена модель: адже ціна – не єдиний чинник, що визначає зміну попиту і пропозиції.

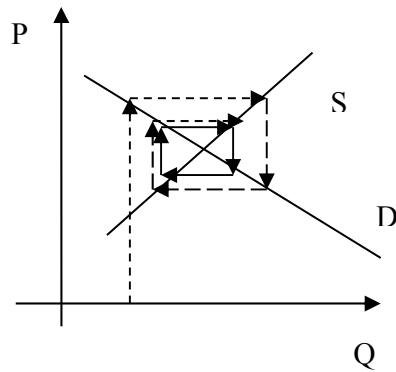


Рис. 4.2. Павутиноподібна модель

Приклади розв'язання задач

4.1. Задано функції попиту $D(Q) = -5Q + 150$ і пропозиції $S(Q) = \frac{Q^2}{4} + \frac{Q}{2} + 70$. Зобразіть криві попиту та пропозиції. Обчисліть аналітично та графічно значення рівноважної ціни.

Розв'язання

Фрагмент робочого документа Mathcad із відповідними обчисленнями і коментарями наведено нижче.

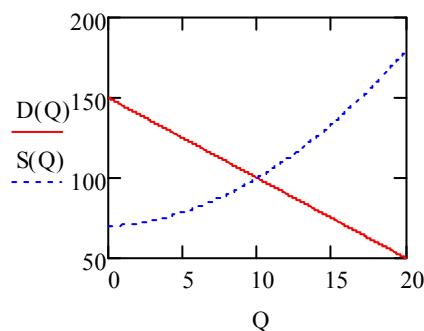
Введемо функцію попиту

$$D(Q) := -5Q + 150$$

Введемо функцію пропозиції

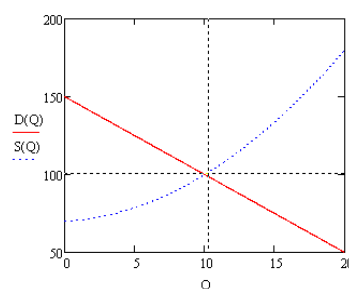
$$S(Q) := \frac{Q^2}{4} + \frac{Q}{2} + 70$$

обудуємо на одному графіку криву попиту і криву пропозиції



Знайдемо рівноважну ціну графічно. Для цього натиснемо по рядку Trace і встановимо стрілки на точці перетину ліній та знайдемо графічно рівноважну ціну.

Трассировка X-Y	
X-значение	10.12
Y-значение	100.66
Y2-значение	
☒ Маркер точки данных	



Знайдемо рівноважну ціну аналітично.

Спочатку знайдемо кількість товару Q , при якому досягається рівноважна ціна. Для цього знайдемо розв'язок рівняння $S(Q) - D(Q) = 0$.

$$S(Q) - D(Q) \text{ solve } \rightarrow \begin{pmatrix} 10 \\ -32 \end{pmatrix}$$

Отже, кількість шуканого товару дорівнює 10 одиниць.

Тоді, рівноважна ціна дорівнює

$$D(10) = 100$$

4.2. Нехай об'єм випуску продукції визначається динамізованою функцією Кобба-Дугласа $Y(t) = a_0 L^{a_1}(t) K^{a_2}(t) e^{\gamma t}$, де $a_1 = 0.3$; $a_2 = 0.6$; $\gamma = 1.5$. Приріст витрат праці дорівнює $l = 1\%$, капіталу $k = 6\%$.

Знайти темп приросту продукції $y(t)$, внесок в цю цифру приросту затрат капіталу, праці і технічного прогресу, представивши виробничу функцію Кобба-Дугласа в темповому записі.

Розв'язання

Виробнича функція $Y(t)$ в темповому записі має вигляд

$$y(t) = \alpha(t)k(t) + \beta(t)l(t) + \gamma,$$

де $y(t)$, $k(t)$ і $l(t)$ – темпи приросту виробництва, капіталу і праці; $\alpha(t)$ і $\beta(t)$ – еластичності випуску по капіталу і праці.

Оскільки для функції Кобба-Дугласа $\alpha(t) = a_1$, $\beta(t) = a_2$, то $\alpha(t) = 0,3$; $\beta(t) = 0,6$; $\gamma = 1,5$; $k(t) = 6\%$; $l(t) = 1\%$. Знайдемо темп приросту продукції $y(t)$: $y(t) = 0,3 \cdot 6\% + 0,6 \cdot 1\% = 3,9\%$. Тоді вклад в загальний темп приросту випуску виробництва екстенсивних факторів – приросту витрат капіталу і праці – складає відповідно $0,3 \cdot 6\% = 1,8\%$ і $0,6 \cdot 1\% = 0,6\%$, або $\frac{1,8\%}{3,9\%} \cdot 100\% \approx 46,15\%$, $\frac{0,6\%}{3,9\%} \cdot 100\% \approx 15,38\%$. Внесок інтенсивних факторів (технічного прогресу) складає 1,5% пункта або $\frac{1,5\%}{3,9\%} \cdot 100\% \approx 38,5\%$.

Розв'яжемо дану задачу із застосуванням Mathcad.

Нижче наведено фрагмент робочого документа Mathcad із відповідними обчисленнями і коментарями.

$$a1 := 0.3$$

$$a2 := 0.6$$

$$\gamma := 1.5$$

Задамо темп приросту праці та капіталу у відсотках

$$l := 1$$

$$k := 6$$

Знайдемо темп приросту випуску виробництва

$$y := a1 \cdot k + a2 \cdot l + \gamma$$

$$y = 3.9$$

Знайдемо внесок в темп приросту продукції витрат капіталу і праці (екстенсивні фактори)

$$kt := \frac{a1 \cdot k}{y} \cdot 100$$

$$kt = 46.154$$

$$lt := \frac{a2 \cdot l}{y} \cdot 100$$

$$lt = 15.385$$

Знайдемо внесок інтенсивних факторів у виробництво (технічного прогресу)

$$\gamma_t := \frac{\gamma}{y} \cdot 100$$

$$\gamma_t = 38.462$$

Зробимо перевірку

$$kt + lt + \gamma_t = 100$$

Завдання для самостійної роботи

4.1. Зобразіть криві попиту і пропозиції. Знайдіть рівноважну ціну.

Виконайте завдання для функцій $D(Q) = -AQ + B$ і $S(Q) = \frac{Q^2}{C} + \frac{Q}{R} + E$.

№	A	B	C	R	E
1	3	120	4	2	80
2	5	12	4	2	80
3	4	100	3	2	70
4	5	120	2	5	70
5	7	100	2	5	70
6	6	120	3	7	90
7	4	140	7	2	60
8	5	130	7	2	60
9	7	100	7	2	60
10	6	140	5	5	50
11	4	110	3	1	70
12	5	140	3	5	70
13	7	90	2	5	70
14	6	130	3	7	90
15	4	150	7	2	60
16	4	140	5	5	50
17	5	130	5	7	80
18	7	150	5	7	80
19	6	140	7	7	70
20	4	140	7	7	70
21	3	120	3	2	70
22	5	120	3	2	70
23	4	100	2	5	70
24	6	120	2	5	70
25	7	100	3	7	90
26	7	150	5	7	80
27	8	140	7	7	80
28	5	140	7	7	90
29	2	120	3	2	40
30	8	120	3	2	50

4.2. Нехай об'єм випуску продукції визначається динамізованою функцією Кобба-Дугласа $Y(t) = a_0 L^{a_1}(t) K^{a_2}(t) e^{\gamma}$. Приріст витрат праці дорівнює $l\%$, капіталу – $k\%$.

Знайти темп приросту продукції Y , внесок в цю цифру приросту затрат капіталу, праці і технічного прогресу, представивши виробничу функцію Кобба –Дугласа в темповому записі.

№	a_0	a_1	a_2	γ	l	k
1	0,5	0,25	0,75	1,0	2,2	4,0
2	0,6	0,31	0,65	1,1	2,4	3,8
3	0,7	0,36	0,61	1,2	2,6	3,6
4	0,8	0,25	0,76	1,3	2,8	3,4
5	0,9	0,7	0,25	1,4	3,0	3,2
6	1,0	0,16	0,84	1,5	3,2	3,0
7	1,1	0,35	0,65	1,6	3,4	2,8
8	1,2	0,34	2,13	1,7	3,6	2,6
9	1,3	0,41	0,91	1,8	3,8	2,4
10	1,4	0,26	0,74	1,9	4,0	2,2
11	0,5	0,25	0,75	1,0	2,2	4,0
12	0,6	0,31	0,65	1,1	2,4	3,8
13	0,7	0,36	0,61	1,2	2,6	3,6
14	0,8	0,25	0,76	1,3	2,8	3,4
15	0,9	0,7	0,25	1,4	3,0	3,2
16	1,0	0,16	0,84	1,5	3,2	3,0
17	1,1	0,35	0,65	1,6	3,4	2,8
18	1,2	0,34	2,13	1,7	3,6	2,6
19	1,3	0,41	0,91	1,8	3,8	2,4
20	1,4	0,26	0,74	1,9	4,0	2,2
21	0,5	0,25	0,75	1,0	2,2	4,0
22	0,6	0,31	0,65	1,1	2,4	3,8
23	0,7	0,36	0,61	1,2	2,6	3,6
24	0,8	0,25	0,76	1,3	2,8	3,4
25	0,9	0,7	0,25	1,4	3,0	3,2
26	1,0	0,16	0,84	1,5	3,2	3,0
27	1,1	0,35	0,65	1,6	3,4	2,8
28	1,2	0,34	2,13	1,7	3,6	2,6
29	1,3	0,41	0,91	1,8	3,8	2,4
30	1,4	0,26	0,74	1,9	4,0	2,2

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ ДО ТЕМ 1-4

1. Визначення математичної моделі.
2. Необхідність використання економіко-математичних моделей.
3. Етапи побудови економіко-математичних моделей.
4. Класифікація економіко-математичних моделей.
5. В чому суть балансового методу дослідження економічних систем?
6. Модель Леонтьєва.
7. За якою формулою обчислюється випуск X у моделі Леонтьєва?
8. Визначення коефіцієнтів прямих і повних витрат.
9. Модель рівноважних цін.
10. Як змінюється кінцевий попит у моделі експорт-імпорт?
11. Модель міжнародної торгівлі.
12. За якою формулою знаходять ціни у системі міжгалузевих зв'язків?
13. Що описує таблиця міжгалузевого балансу?
14. Як знайти коефіцієнти прямих витрат?
15. Що таке міжгалузевий баланс в економіці?
16. В чому полягає мета балансового аналізу?
17. Для чого необхідне виконання умов Хаукінса-Саймона?
18. Що задає змінна ORIGIN в пакеті MATHCAD?
19. Наведіть формулу співвідношення балансу Моделі Леонтьєва у матричній формі.
20. За якої математичної умови досягається баланс у міжнародній торгівлі?
21. Що таке функція попиту?
22. Що таке функція пропозиції?
23. З чого складається додана вартість?
24. Поняття економічної рівноваги.
25. Павутиноподібна модель ринку.
26. Рівноважна ціна.

27. Модель експорту-імпорту.
28. Чим відрізняються модель експорту-імпорту від моделі витрати-випуск Леонтьєва міжгалузевого балансу?
29. Чому дорівнює сума елементів кожного стовпчика структурної матриці торгівлі?
30. На які складові розділяють повні витрати?
31. За якою формулою обчислюється повний виторг?
32. Що таке граничний виторг?
33. Які товари називають товарами еластичного попиту?
34. Що таке середній виторг?
35. Як графічно знайти рівноважну ціну?
36. Що обчислює функція $\text{eigenvec}(A,1)$ у пакеті MATHCAD?
37. Що таке виробнича функція?
38. Основні властивості виробничих функцій.
39. Види виробничих функцій.
40. Середні та граничні показники.
41. Еластичність економічних функцій.
42. Сформулюйте визначення часткової еластичності випуску і визначення еластичності виробництва?
43. Сформулюйте визначення граничної норми заміни одного ресурсу іншим.
44. Як змінюється гранична норма заміни одного ресурсу іншим при русі по ізокванті?
45. Дайте визначення і поясніть зміст виробничої функції в темповому записі.
46. Який зміст та які властивості виробничої функції CES?
47. Показники економічної динаміки.

ОПТИМІЗАЦІЙНІ ТА ІМІТАЦІЙНІ МОДЕЛІ, ІГРОВІ МЕТОДИ

5. Моделювання сфери попиту і споживання

5.1. Функції попиту Торнквіста.

5.2. Функція корисності та її властивості. Лінії байдужості.

5.3. Модель споживчого вибору.

5.4. Модель Р. Стоуна.

Мета практичної роботи: ознайомитися з функціями попиту Торнквіста, функціями корисності, лініями байдужості, вивчити моделі споживчого вибору і Р.Стоуна, навчитись розв'язувати задачу нелінійного програмування (на умовний екстремум) із застосуванням комп'ютерних технологій.

Основний теоретичний матеріал

5.1. Функції попиту Торнквіста

Предметом теорії споживання є дослідження того, як люди поділяють заробітну плату між різними видатковими статтями свого бюджету, у яких об'ємах вони купують продукти споживання і т. д.

Функції попиту описують залежність попиту D на продукт споживання від ціни P цього продукту і від прибутку споживача x , $D = D(x, P)$. При фіксованій ціні P функція попиту залежить тільки від прибутку $D = D(x)$.

Розглянемо як приклад функції попиту Торнквіста $D(x)$, що описують залежність розміру попиту на різні групи товарів у залежності від їхньої ціни і ролі в споживчому кошику:

$$D_0(x) = \frac{ax(x+b)}{x^2+c} \text{ — попит на малоцінні товари;}$$

$$D_1(x) = \frac{ax}{x+b} - \text{попит на товари першої необхідності};$$

$D_2(x) = \frac{a(x-c)}{x+b} -$ попит на товари другої необхідності (відносна розкіш);

$$D_3(x) = \frac{ax(x-c)}{x+b} - \text{попит на предмети розкоші}.$$

Тут a, b, c – деякі фіксовані параметри. Нижче наведено приклад графіків функцій попиту Торнквіста, побудовані в Mathcad.

$$a := 10$$

$$b := 3$$

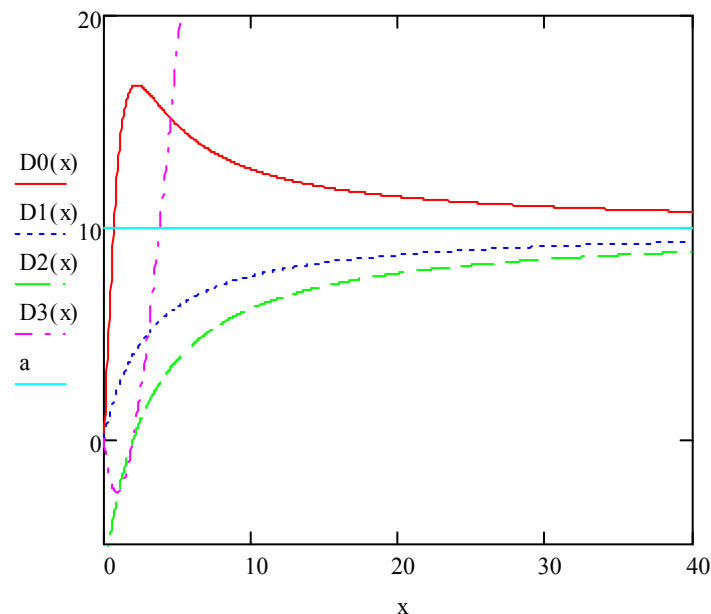
$$c := 2$$

$$D0(x) := \frac{a \cdot x \cdot (x + b)}{x^2 + c}$$

$$D1(x) := \frac{a \cdot x}{x + b}$$

$$D2(x) := \frac{a \cdot (x - c)}{x + b}$$

$$D3(x) := \frac{a \cdot x \cdot (x - c)}{x + b}$$



З приведених графіків видно, що при $a = 10$, $b = 3$, $c = 2$ попит на малоцінні товари зростає при малих прибутках, а потім, із зростанням доходів, починає падати і прагне до значення a зверху. Попит на товари першої необхідності зростає зі зростанням доходів і прагне до значення a

знижу. Товари другої необхідності і предмети розкоші купують тільки люди з прибутком, що перевищує $\gamma = 2$. При цьому попит на товари другої необхідності відстає від попиту на товари першої необхідності й обмежений зверху значенням α . І тільки попит на предмети розкоші зі зростанням доходів постійно зростає.

5.2. Функція корисності та її властивості. Лінії байдужості

Одним із основних елементів економічної теорії є споживачі, які розподіляють свої доходи на купівлю та споживання товарів і послуг. Враховуючи структуру цін, дохід і власні переваги, споживач придбає визначені кількості товарів і математична модель такої його поведінки називається моделлю споживчого вибору.

З метою наочності розглянемо спочатку споживчий набір з двох товарів. Це є вектор $x = (x_1, x_2)$, координати x_1, x_2 якого відповідно дорівнюють кількості одиниць першого та другого товарів. Вибір споживача характеризується відношенням переваги. Вважається, що споживач про кожні два набори може сказати, який з них для нього більш бажаний, або він між ними не бачить ніякої різниці. Відношення переваги транзитивне, тобто якщо набір $A = (a_1, a_2)$ переважніший за набір $B = (b_1, b_2)$, а набір B за набір $C = (c_1, c_2)$, то набір A переважніший за набір C . Для кількісної оцінки відношення переваги на множині споживчих наборів (x_1, x_2) визначена функція корисності споживача, значення якої $u(x_1, x_2)$ дорівнює оцінці споживачем набору товарів (x_1, x_2) . Функція корисності $u(x_1, x_2)$ кількісно характеризує рівень (ступінь) задоволення потреб споживача від придбання набору (x_1, x_2) . Кожний споживач має свою функцію корисності.

Функція $u(x)$ називається функцією корисності, яка відповідає відношенню переваги $\geq$, якщо $u(x) \geq u(y)$ тоді та тільки тоді, коли $x \geq y$.

Припускаємо, що функція $u(x)$ двічі диференційована та строго вгнута. Крім того,

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = u'_1 > 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = u'_2 > 0, \quad \lim_{x_2 \rightarrow 0} u_i = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u_i = 0, \quad i = 1, 2 \quad (5.1)$$

Перші частинні похідні називаються граничними корисностями товарів: u_1 – гранична корисність першого товару, u_2 – другого.

Лінії, які з'єднують споживчі набори (x_1, x_2) , що мають один і той же рівень задоволення потреб окремого споживача називаються лініями байдужості. Останні є не що інше, як лінії рівня функції корисності. Якщо просуватись по лінії рівня, то приріст функції корисності $u(x_1, x_2)$ дорівнює нулю. Звідси випливає:

$$du(x_1, x_2) = u'_1 dx_1 + u'_2 dx_2 = 0; \quad \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{u'_1}{u'_2} < 0, \quad (5.2)$$

тобто лінії рівня функції корисності ($x_2 = x_2(x_1)$ при $u = \text{const}$) є спадаючими функціями. З цього та граничних властивостей (5.1) випливає, що лінії байдужості є спадаючими, вгнутими кривими, які ніде не перетинаються і не дотикаються (рис. 5.1)

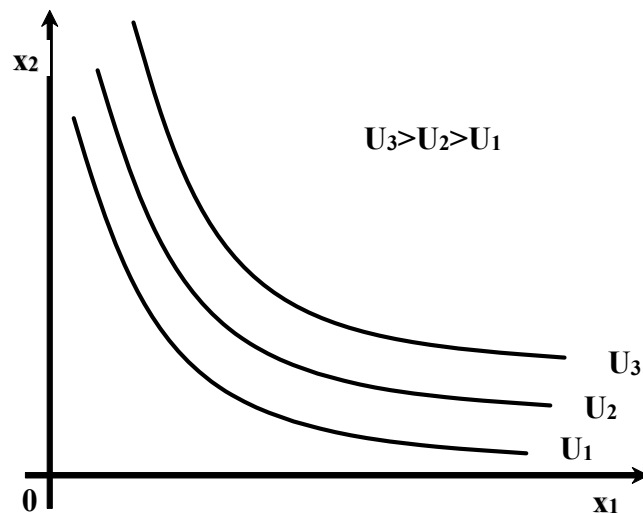


Рис. 5.1

Чим “вище” та “правіше” знаходиться лінія байдужості, тим більшому рівню задоволення потреб споживача вона відповідає.

Із (5.2) випливає, що:

$$-\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} \approx \frac{u'_1}{u'_2} \quad (5.3)$$

Відношення $-\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$ показує, на скільки споживач повинен збільшити (зменшити) споживання другого товару, якщо він зменшив (збільшив) споживання першого на одну одиницю без зміни рівня задоволення своїх потреб. Воно називається нормою заміни першого товару другим і, як випливає з (5.3), приблизно дорівнює відношенню граничних корисностей першого товару до другого. Похідна $-\frac{dx_2}{dx_1}$ називається граничною нормою заміни першого товару другим.

5.3. Модель споживчого вибору

Задача раціональної поведінки споживача на ринку полягає у виборі такого набору $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ товарів, який максимізує його функцію корисності при заданому бюджетному обмеженні: $p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq K$, де p_1 і p_2 – ціни одиниць першого та другого товарів, K – дохід (капітал), який споживач готовий витратити на придбання цих товарів. Очевидно, що якщо при якомусь наборі (x_1, x_2) бюджетне обмеження буде виконуватись як строга нерівність, то споживач може придбати якогось з товарів більше і тим самим збільшити функцію корисності. З цього випливає, що набір (x_1^0, x_2^0) , який максимізує функцію корисності $u(x_1, x_2)$, повинен перетворювати бюджетне обмеження в рівність, тобто: $p_1 x_1^0 + p_2 x_2^0 = K$.

Підсумовуючи, модель споживчого вибору можна подати, як задачу нелінійного програмування:

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2) &\rightarrow \max, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 &= K, \end{aligned} \quad (5.4)$$

Набір $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$, який являється розв'язком цієї задачі, називається оптимальним для споживача, або максимальною ринковою рівновагою споживача.

Задачу (5.4) на умовний екстремум можна розв'язати методом Лагранжа. Від функції Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = u(x_1, x_2) + \lambda(K - p_1x_1 - p_2x_2)$$

знаходимо перші частинні похідні по змінним x_1 , x_2 , λ і прирівнюємо їх до нуля:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = u'_1 - \lambda p_1 = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = u'_2 - \lambda p_2 = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = K - p_1x_1 - p_2x_2 = 0 \quad (5.5)$$

Виключаючи з перших двох рівнянь невідому λ , отримаємо два рівняння з двома невідомими x_1 і x_2 :

$$\frac{u'_1}{u'_2} = \frac{p_1}{p_2}, \quad p_1x_1 + p_2x_2 = K \quad (5.6)$$

Розв'язок цієї системи (x_1^0, x_2^0) є розв'язком задачі споживчого вибору. Координати x_1^0 і x_2^0 є функції параметрів p_1 , p_2 і K :

$$x_i^0 = x_i^0(p_1, p_2, K), \quad x_2^0 = x_2^0(p_1, p_2, K), \quad (5.7)$$

Ці функції називаються функціями попиту на перший і другий товари. Важливою властивістю цих функцій є їх однорідність нульової степені відносно цін і доходу, тобто значення функцій попиту інваріантні по відношенню до пропорційної зміни цін та доходу:

$$x_i^0(\alpha p_1, \alpha p_2, \alpha K) = x_i^0(p_1, p_2, K), \quad \alpha > 0; \quad i = 1, 2$$

Підставляючи розв'язок (5.7) в співвідношення (5.6), отримаємо, що в точці локальної ринкової рівноваги споживача, відношення граничних корисностей першого та другого товарів дорівнює відношенню їх ринкових цін:

$$\frac{u'_1(x_1^0, x_2^0)}{u'_2(x_1^0, x_2^0)} = \frac{p_1}{p_2} \quad (5.8)$$

З перших двох рівнянь системи (5.5), з врахуванням (5.7), випливає, що оптимальний множник Лагранжа:

$$\lambda^o = \lambda^o(p_1, p_2, K) = \frac{u'_1(x_1^o, x_2^o)}{p_1} = \frac{u'_2(x_1^o, x_2^o)}{p_2} \quad (5.9)$$

визначає корисність, яка приходить на одиницю грошових витрат. Його слід інтерпретувати як граничну корисність додаткового доходу:

$$\lambda^o = \frac{\partial u(x_1^o, x_2^o)}{\partial K},$$

яка називається граничною корисністю грошей, тобто λ^o є величина, на яку збільшиться оптимальний рівень корисності $u(x_1^o, x_2^o)$, коли дохід збільшиться на одну грошову одиницю.

Співвідношення (5.9) означає, що додаткова корисність, яка приходить на додаткову одиницю грошових витрат в точці локальної ринкової рівноваги однакова для всіх товарів.

Із співвідношень (5.2), (5.8) випливає, що в точці локальної ринкової рівноваги (x_1^o, x_2^o) гранична норма заміни першого товару другим дорівнює відношенню ринкових цін:

$$-\frac{dx_2^o}{dx_1^o} = \frac{p_1}{p_2} \quad (5.10)$$

Звідси випливає геометрична інтерпретація розв'язку задачі споживчого вибору. Відношення $-\frac{p_1}{p_2}$ є тангенс кута нахилу бюджетної прямої (5.4), а похідна $\frac{dx_2}{dx_1}$ – визначає тангенс кута нахилу лінії рівня функції корисності. Із співвідношення (5.10) випливає, що в точці (x_1^o, x_2^o) вони рівні, тобто в цій точці відбувається дотик цих двох ліній, як це зображено на рис. 5.2:

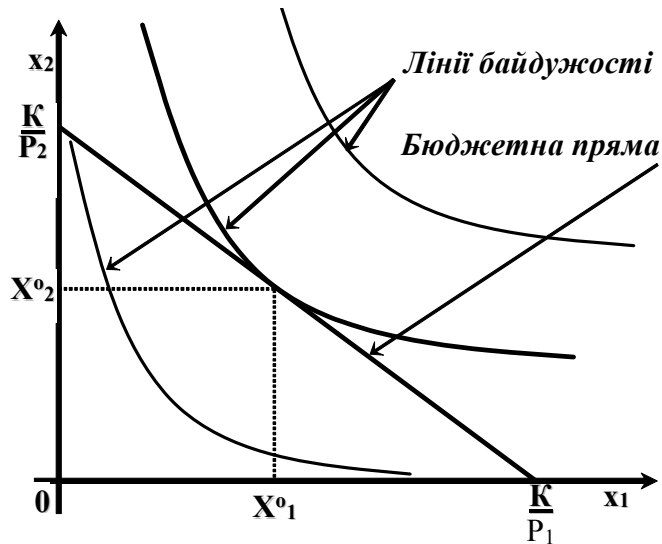


Рис. 5.2

Випадок споживчого набору $x_1, \dots, x_n$ із n товарів з цінами $p_1, \dots, p_n$ принципово не відрізняється від випадку двох товарів.

5.4. Модель Р. Стоуна

Розв'яжемо задачу споживчого вибору, коли функція корисності споживача задається функцією Стоуна:

$$u(x) = u(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n (x_i - a_i)^{\alpha_i},$$

де a_i – мінімально необхідна кількість i -го товару, яку необхідно придбати обов'язково і яка не є предметом вибору, коефіцієнти степені $\alpha_i > 0$ характеризують відносну “цінність” товарів для споживача.

Як і вище, прирівнюючи до нуля перші частинні похідні по x_i, λ функції Лагранжа

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda) = \prod_{i=1}^n (x_i - a_i)^{\alpha_i} + \lambda(K - p_1 x_1 - \dots - p_n x_n),$$

отримаємо

$$\frac{\alpha_i u(x)}{x_i - a_i} - \lambda p_i = 0; \quad i = 1, \dots, n; \quad K - \sum_{i=1}^n p_i x_i = 0. \quad (5.11)$$

Звідки з перших n рівнянь системи маємо:

$$x_i = a_i + \frac{\alpha_i u(x)}{\lambda p_i}; \quad i = 1, \dots, n \quad (5.12)$$

Для знаходження λ помножимо (5.12) на λp_i і просумуємо по i :

$$\lambda \sum_{i=1}^n p_i x_i = \lambda \sum_{i=1}^n p_i a_i + u(x) \sum_{i=1}^n \alpha_i \quad (5.13)$$

Із останнього рівняння системи (5.11) $\sum_{i=1}^n p_i x_i = K$. Підставляючи це значення в (5.13.), отримаємо:

$$\frac{u(x)}{\lambda} = \frac{K - \sum_{i=1}^n p_i a_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \quad (5.14)$$

Підставляючи (5.14) в (5.12), отримаємо функцію попиту на товари, коли функція корисності споживача задається функцією Стоуна:

$$x_i = a_i + \frac{\alpha_i (K - \sum_{i=1}^n p_i a_i)}{p_i \sum_{i=1}^n \alpha_i}; \quad i = 1, \dots, n \quad (5.15)$$

Цю функцію легко отримати та запам'ятати виходячи з наступних міркувань. Спочатку споживач має придбати необхідну кількість кожного товару a_i . Потім сума грошей, що залишається після цього $(K - \sum_{i=1}^n p_i a_i)$, розподіляється пропорційно коефіцієнтам важливості α_i товарів для споживача. Поділивши кількість грошей на вартість p_i отримуємо додаткову (зверх мінімуму) кількість i -го товару, яка додається до a_i .

Модель Стоуна має різні частинні випадки. Наприклад, коли всі $a_i = 0$, а всі α_i рівні між собою, отримаємо $x_i = \frac{K}{np_i}$, тобто весь капітал ділиться на n рівних частин і попит розраховується як частка від ділення отриманої суми грошей на ціну p_i .

Приклади розв'язання задач

5.1. Побудуйте графік функції Торнквіста попиту на малоцінні товари при $\alpha = 10$, $\beta = 2$. Дослідіть вигляд кривої при різних значеннях параметрів $\gamma = 1, 2, 3, 4$.

Розв'язання

Фрагмент робочого документа Mathcad із відповідними обчисленнями і коментарями наведено нижче.

Введемо значення параметрів a та b

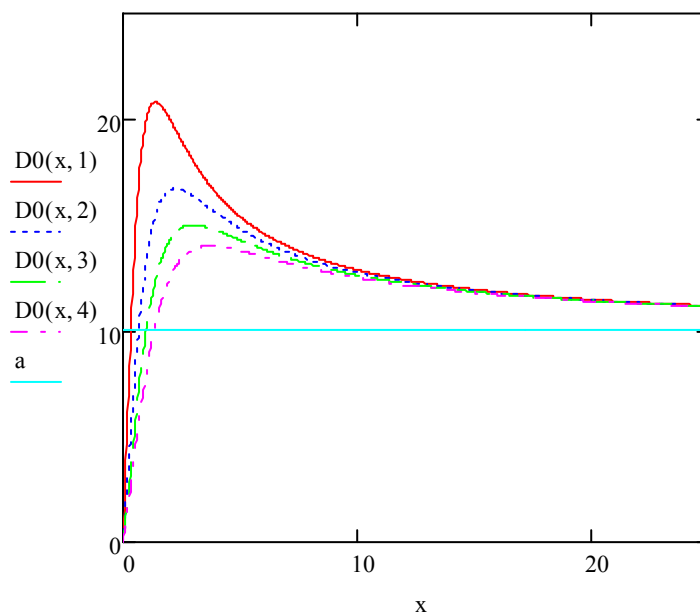
$a := 10$

$b := 3$

Введемо функцію Торквінста попиту на малоцінні товари

$$D0(x, c) := \frac{a \cdot x \cdot (x + b)}{x^2 + c}$$

Побудуємо графік функції Торквінста для різних значень параметра c



5.2. Розв'яжіть задачу споживчого вибору, коли функція корисності $u = (x_1 - 1)^{1/2}(x_2 - 2)^{2/3}$, ціни на товари $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, дохід $K = 10$.

Розв'язання

Фрагмент робочого документа Mathcad із відповідними обчисленнями і коментарями наведено нижче.

Задамо ціни на товари

$$p1 := 2$$

$$p2 := 3$$

Задамо дохід

$$K := 10$$

Задамо функцію переваг

$$u(x, y) := (x - 1)^{\frac{1}{2}} \cdot (y - 2)^{\frac{2}{3}}$$

Розв'яжемо задачу методом множників Лагранжа.

Запишемо функцію Лагранжа

$$L(x, y, \lambda) := u(x, y) + \lambda(p1 \cdot x + p2 \cdot y - K)$$

Знаходимо її частинні похідні по змінним x , y , λ , прирівнюємо їх до нуля та розв'язуємо систему рівнянь

Given

$$\frac{d}{dx} L(x, y, \lambda) = 0$$

$$\frac{d}{dy} L(x, y, \lambda) = 0$$

$$\frac{d}{d\lambda} L(x, y, \lambda) = 0$$

$$\text{Find}(x, y, \lambda) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{10}{7} \\ \frac{50}{21} \\ \frac{5}{6} \\ -\frac{21}{63} \end{pmatrix}$$

Отримаємо оптимальний для споживача вибір товарів

$$x := \frac{10}{7}$$

$$y := \frac{50}{21}$$

Підставляючи ці значення в функцію корисності отримаємо її максимальне значення

$$u(x, y) = 0.344$$

Завдання для самостійної роботи

5.1. Зобразіть графік заданої функції попиту. Дослідіть вигляд кривої при різних значеннях параметрів.

Варіанти 1-15: дослідіть функцію $D_0(x) = \frac{ax(x+b)}{x^2+c}$.

Варіанти 16-30: дослідіть функцію $D_1(x) = \frac{ax}{x+b}$.

№	a	b	c
1	11	1	2
2	12	2	2
3	13	3	2
4	14	4	2
5	15	5	2
6	16	6	2
7	13	4	2
8	12	4	2
9	12	5	3
10	12	5	4
11	10	5	5
12	10	5	5
13	16	3	2
14	15	3	2
15	13	1	2
16	14	2	2
17	11	4	2
18	14	4	2
19	10	4	2
20	11	4	2
21	12	5	3
22	13	5	4
23	14	5	5
24	15	5	5
25	5	4	2
26	6	4	2
27	7	5	3
28	8	5	4
29	9	5	5
30	10	5	5

5.2. Розв'яжіть задачу споживчого вибору при цінах товарів p_1 , p_2 і доході K , коли функція корисності має вигляд: $u = b_1(x_1 - a_1)^{1/2}(x_2 - a_2)^{2/3}$.

Дані наведені в таблиці.

№	p_1	p_2	K	a_1	a_2	b_1
1	1	10	120	0	9	1
2	2	9	160	1	8	2
3	3	8	200	2	7	3
4	4	7	240	3	6	4
5	5	6	280	4	5	5
6	6	5	320	5	4	6
7	7	4	360	6	3	7
8	8	3	400	7	2	8
9	9	2	440	8	1	9
10	10	1	480	9	0	10
11	1	10	120	0	9	1
12	2	9	160	1	8	2
13	3	8	200	2	7	3
14	4	7	240	3	6	4
15	5	6	280	4	5	5
16	6	5	320	5	4	6
17	7	4	360	6	3	7
18	8	3	400	7	2	8
19	9	2	440	8	1	9
20	10	1	480	9	0	10
21	1	10	120	0	9	1
22	2	9	160	1	8	2
23	3	8	200	2	7	3
24	4	7	240	3	6	4
25	5	6	280	4	5	5
26	6	5	320	5	4	6
27	7	4	360	6	3	7
28	8	3	400	7	2	8
29	9	2	440	8	1	9
30	10	1	480	9	0	10

6. Оптимізаційні моделі

6.1. Основні поняття оптимізації виробництва. Максимізація прибутку. Ізокости.

6.2. Визначення оптимального запасу продукції торговельних фірм.

6.3. Модель розміщення програмних модулів у багаторівневій пам'яті комп'ютера з метою мінімізації часу розв'язування.

6.4. Задача про вибір оптимальної структури автоматизованої системи управління (АСУ).

Мета практичної роботи: навчитись знаходити графічно і чисельно максимальний прибуток, межі прибуткового виробництва та мінімум витрат при фіксованому об'ємі виробництва із використанням комп'ютерного програмного забезпечення.

Основний теоретичний матеріал

6.1. Основні поняття оптимізації виробництва.

Максимізація прибутку. Ізокости

Доходом (виручкою) R фірми у визначеному часовому періоді (наприклад, у певному році) називається добуток $p_0 y$ загального об'єму y , що випускається фірмою продукції на (ринкову) ціну p_0 цієї продукції.

Витратами C фірми називають загальні виплати фірми за певний часовий період за всі види витрат $C = p_1 x_1 + p_2 x_2$, де x_1 і x_2 – обсяги витрачених (використаних) фірмою ресурсів (факторів виробництва), p_1 і p_2 – ринкові ціни на ці ресурси (фактори виробництва).

Прибутком Pr фірми у визначеному часовому періоді називається різниця між отриманим фірмою доходом R та її витратами виробництва

$$Pr = R - C,$$

або

$$\text{Pr}(x_1, x_2) = p_0 f(x_1, x_2) - (p_1 x_1 + p_2 x_2).$$

Остання рівність є вираження прибутку фірми в термінах ресурсів, що витрачаються (використовуються).

Нагадаємо, що $y = f(x_1, x_2)$ – виробнича функція фірми, яка виражає загальний обсяг y продукції, що випускається фірмою через обсяги x_1 і x_2 ресурсів, що витрачаються.

У теорії фірми прийнято вважати, що якщо фірма функціонує в умовах чистої (досконалої) конкуренції, на ринкові ціни P_0 , P_1 і P_2 вона впливати не може. Фірма "погоджується" з цінами P_0 , P_1 і P_2 .

Основна мета фірми полягає в максимізації прибутку шляхом раціонального розподілу ресурсів, що витрачаються.

Формально задача максимізації прибутку в певному часовому періоді має вигляд

$$\text{Pr} \rightarrow \max.$$

Оскільки ціна визначається не тим, скільки хоче отримати виробник, а тим, скільки готовий заплатити споживач, повний виторг, отриманий від реалізації товару в кількості Q за ціною P , обчислюється за формулою $R = QP(Q)$, де $P = P(Q)$ відповідна функція попиту.

Повні витрати C розділяють на постійні C_1 , що не залежать від об'єму виробництва Q і змінні C_2 – витрати на виробництво одиниці продукції, тобто

$$C = C_1 + C_2 Q.$$

Задача про визначення максимального прибутку покладається у визначенні такого об'єму виробництва $Q_{\max}$, при якому досягається максимальний прибуток, тобто потрібно при заданих значеннях C_1 , C_2 і заданій функції попиту $P = P(Q)$ знайти максимум функції

$$\text{Pr}(Q) = QP(Q) - (C_1 + C_2 Q).$$

Для знаходження максимуму функції використовують методи диференціального числення.

Така постановка задачі максимізації залежить від того, який конкретно часовий проміжок (довгостроковий чи короткостроковий) передуює періоду, в якому фірма максимізує свій прибуток.

У разі довгострокового проміжку фірма може вільно вибрати будь-який вектор $x = (x_1, x_2)$ витрат з простору витрат (формально з невід'ємної чверті $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ площини Ox_1x_2), тому завдання максимізації прибутку в разі довгострокового проміжку має такий вигляд

$$p_0 f(x_1, x_2) - (p_1 x_1 + p_2 x_2) = \text{Pr}(x_1, x_2) \rightarrow \max$$

за умови, що

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Якщо функція $f(x_1, x_2)$ лінійна, то отримуємо задачу лінійного програмування, яка розв'язується симплекс методом [18] або із застосуванням електронних таблиць Excel (надбудова «Пошук рішення») [10].

Якщо функція $f(x_1, x_2)$ нелінійна, то маємо задачу нелінійного програмування, яка розв'язується методом Лагранжа [п. 5.1].

У випадку короткострокового проміжку фірма повинна враховувати немінучі ліміти на обсяги витрачених (використовуваних) нею ресурсів, які формально можуть бути записані у вигляді нелінійних нерівностей

$$g(x_1, x_2) \leq b$$

(обмежень виду $g(x_1, x_2) \leq b$ може бути декілька). Відповідно, завдання максимізації прибутку для короткострокового проміжку має вигляд задачі математичного програмування

$$p_0 f(x_1, x_2) - (p_1 x_1 + p_2 x_2) = \text{Pr}(x_1, x_2) \rightarrow \max$$

за умови, що

$$g(x_1, x_2) \leq b, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

(постановка задачі з обмеженнями на ресурси).

Лінія рівня функції $z = p_1x_1 + p_2x_2$ витрат виробництва називається ізокостою (див. рис. 6.1).

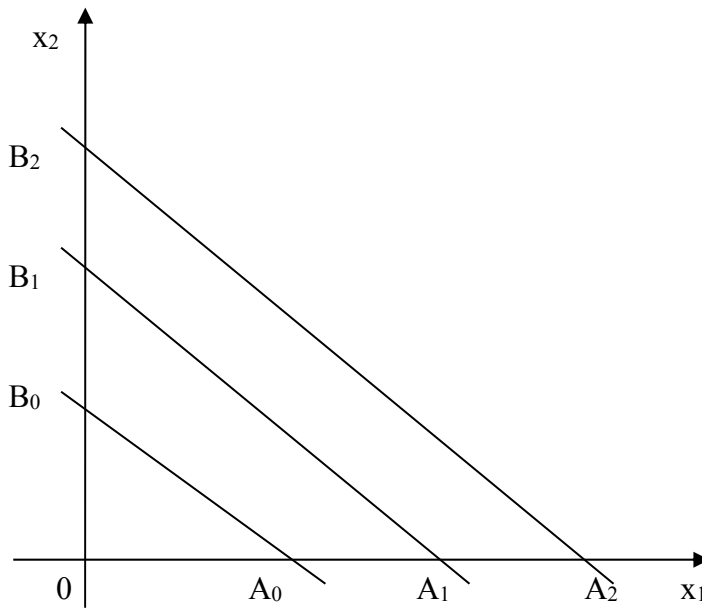


Рис. 6.1. Ізокости

У зв'язку з тим, що за економічним змістом $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ (оскільки x_1 і x_2 – це обсяги витрачених (використовуваних) ресурсів), строго кажучи, ізокоста є відрізок прямої, що потрапляє в невід'ємну четверть площини Ox_1x_2 . Таким чином, ізокости – це відрізки A_0B_0 , A_1B_1 , A_2B_2 , ... (див. рис. 6.1). Відрізки A_0B_0 , A_1B_1 , A_2B_2 паралельні. Чим вище та правіше відрізок A_iB_i тим більшим витратам виробництва він відповідає.

Для відрізка A_iB_i маємо наступний аналітичний вид

$$C_i = p_1x_1 + p_2x_2, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

6.2. Визначення оптимального запасу продукції торговельних фірм

Позначимо через x ринковий попит на продукцію торговельної фірми для деякого фіксованого періоду часу (день, тиждень, місяць та ін.), який наперед невідомий. Одиниці виміру продукції, що продається, можуть бути як фізичні (кілограми, літри тощо), так і грошові. Припустимо, що нереалізована за такий період продукція втрачає свої

споживчі якості за час зберігання і не може бути продана в наступний період. Позначимо далі через C_1 суму собівартості та додаткових витрат на зберігання одиниці продукції, яка не була реалізована за згаданий період часу у зв'язку з тим, що попит на неї був менший за прогнозований, а через C_2 – втрати прибутку на одиницю продукції, які зумовлені її відсутністю, коли попит на неї перевищує її кількість s , яка є на фірмі.

З урахуванням вищезгаданих позначень втрати фірми визначаються функцією

$$V(x, s) = \begin{cases} C_1(s - x), & \text{коли } s \geq x, \\ C_2(x - s), & \text{коли } s < x. \end{cases} \quad (6.1)$$

Будемо розглядати попит на продукцію x як випадкову величину з функцією розподілу $F(x)$, яка може бути визначена на основі статистичних спостережень або іншої інформації. Тоді втрати фірми $V(x, s)$, які визначаються співвідношенням (6.1), є функцією від випадкової величини x (попиту) та величини запасу продукції s .

Мета фірми – знайти таке значення запасу продукції s , яке б мінімізувало математичне сподівання (середнє значення)

$$M[V(x, s)] = \int_{-\infty}^{\infty} V(x, s) dF(x) \quad (6.2)$$

її витрат.

Підставляючи в (6.2) функцію втрат (6.1), отримуємо

$$\begin{aligned} M[V(x, s)] &= C_1 \int_{-\infty}^s (s - x) dF(x) + C_2 \int_s^{\infty} (x - s) dF(x) = C_1 \left[s \int_{-\infty}^s dF(x) - \int_{-\infty}^s x dF(x) \right] + \\ &+ C_2 \left[\int_s^{\infty} x dF(x) - s \int_s^{\infty} dF(x) \right] = C_1 \left[sF(s) - \int_{-\infty}^s x dF(x) \right] + C_2 \left[\int_s^{\infty} x dF(x) + \int_{-\infty}^s x dF(x) - \int_{-\infty}^s x dF(x) - \right. \\ &\left. - s(1 - F(s)) \right] = C_1 \left[sF(s) - \int_{-\infty}^s x dF(x) \right] + C_2 \left[M[x] - \int_{-\infty}^s x dF(x) - s(1 - F(s)) \right] = \\ &= (C_1 + C_2)sF(s) - C_2s - (C_1 + C_2) \int_{-\infty}^s x dF(x) + C_2M[x], \end{aligned}$$

де $M[x]$ – математичне сподівання випадкової величини x .

Для знаходження мінімального значення математичного сподівання $M[V(x,s)]$, яке є функцією від запасу s , прирівнюємо до нуля першу похідну від цієї функції по змінній s :

$$\frac{dM[V(x,s)]}{ds} = (C_1 + C_2)[F(s) + sf(s)] - C_2 - (C_1 + C_2)sf(s) = (C_1 + C_2)F(s) - C_2 = 0, \quad (6.3)$$

де $f(s) = \left(f(x) = \frac{dF}{dx} \right)$ – щільність ймовірності розподілу попиту в точці s .

Зі співвідношення (6.3), що є рівнянням відносно s , випливає, що оптимальне значення запасу продукції торговельної фірми s_0 , яке мінімізує її втрати, задовольняє умову

$$F(s_0) = \frac{C_2}{C_1 + C_2} \quad (6.4)$$

За визначенням $F(s_0) = P(x < s_0)$, тобто рівність (6.4) означає, що оптимальне значення запасу s_0 повинно бути таким, щоб ймовірність того, що попит x буде менший за s_0 , має дорівнювати $\frac{C_2}{C_1 + C_2}$.

З останнього випливає простий алгоритм для визначення s_0 . На основі статистичних спостережень будується графік функції розподілу (кумулята). Графічно або з аналітичного виразу функції розподілу $F(x)$ знаходиться таке значення s_0 , для якого виконується рівність (6.4). Якщо розподіл близький до відомих, наприклад до нормального, значення s_0 можна визначити за таблицями нормального розподілу.

Розглянемо, як це робиться на практиці.

Нехай потрібно визначити оптимальне значення запасу продукції, коли відомі: $C_1 = 0,6$, $C_2 = 0,4$ та статистичні спостереження щоденного попиту на продукцію упродовж 31 дня, який наведений у вигляді доходу (табл. 6.1).

Таблиця 6.1

Дохід, у. о.	0–2	2–4	4–6	6–8	8–10	10–12	12–14	14–16	16–18	18–20
Частота	0	1	2	4	6	7	5	3	2	1
Відносні частоти	0	0,03	0,06	0,13	0,20	0,23	0,16	0,10	0,06	0,03
Накопи- чені частоти	0	0,03	0,09	0,22	0,42	0,65	0,81	0,91	0,97	1,00

На основі цих даних за відомими формулами зі статистики розраховуємо частоти, відносні частоти, накопичені частоти (кумулятивний ряд) і будуємо графік розподілу (рис. 6.2), тобто графік накопичених частот.

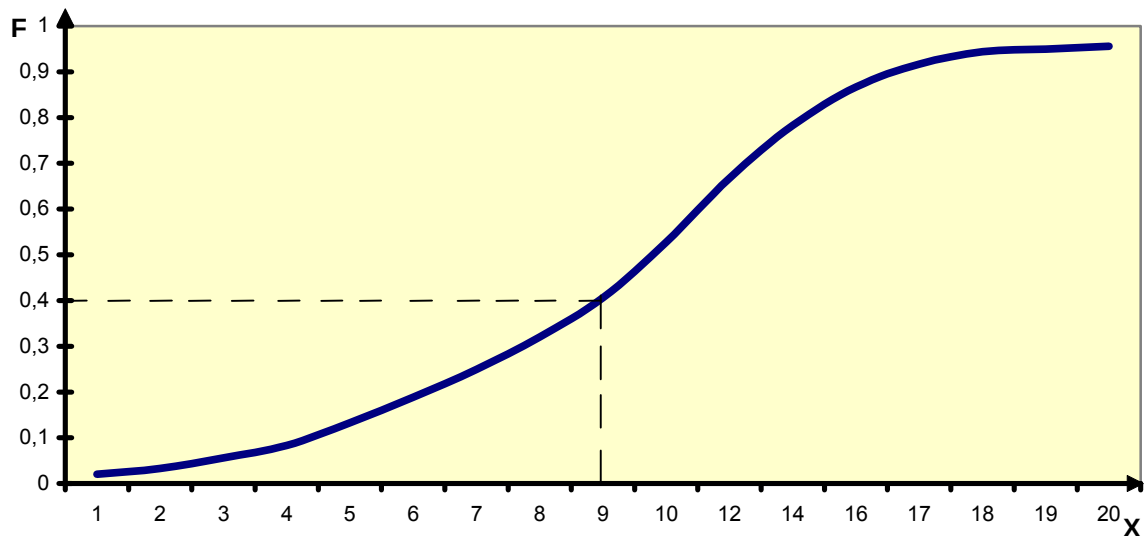


Рис. 6.2

Далі за формулою (6.4) розраховуємо

$$F(s_0) = \frac{C_2}{C_2 + C_1} = \frac{0,4}{0,6 + 0,4} = 0,4$$

і графічно визначимо $s_0 \approx 9$ у.о. Це і буде шукане оптимальне значення щоденного запасу продукції торговельної фірми в кошовному виразі, яке мінімізує математичне співвідношення (середнє значення) її втрат за один день [6].

Аналогічно вищевикладеному, можна робити розрахунки для прогнозування оптимального запасу продукції виробничих фірм для будь-якого проміжку часу.

6.3. Модель розміщення програмних модулів у багаторівневій пам'яті комп'ютера з метою мінімізації часу розв'язування

Нехай є m програмних модулів для побудови алгоритмів розв'язування задач певного класу, a_i – об'єм (число стандартних слів) пам'яті, необхідний для розміщення i -го програмного модуля, $i = \overline{1, m}$, p_i – частота його використання. Система реалізована на комп'ютері, пам'ять якого складається з n рівнів, b_j – об'єм пам'яті j -го рівня, $j = \overline{1, n}$, t_j – час вибирання слова стандартної довжини з пам'яті j -го рівня. Необхідно так розмістити програмні модулі в багаторівневій пам'яті комп'ютера, щоб мінімізувати середній час розв'язування задач заданого класу.

Введемо змінні x_{ij} , $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, які визначаються формулою

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i\text{-ий програмний модуль розміщений в пам'яті } j\text{-го рівня,} \\ 0, & \text{у протилежному випадку.} \end{cases}$$

Тоді математична модель задачі буде такою

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^m \sum_{j=1}^n t_j a_i p_i x_{ij} &\rightarrow \min, \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} &= 1, \quad i = \overline{1, m}, \\ \sum_{i=1}^m a_i x_{ij} &\leq b_j, \quad j = \overline{1, n}, \\ x_{ij} &\in \{0, 1\}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Перше обмеження задачі означає, що i -й програми може розміщуватися лише в одному з j -х рівнів пам'яті, а друге – об'єм пам'яті, який займають програмні модулі, розміщені в j -му рівні, не перевищує об'єму пам'яті j -го рівня [7].

6.4. Задача про вибір оптимальної структури автоматизованої системи управління (АСУ)

Нехай АСУ містить n вузлів і призначена для розв'язування m задач. Затрати ресурсів на розв'язування i -ї задачі в j -му вузлі становлять величину a_{ij} , $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, а ресурси, що є в j -му вузлі – величину b_j . Структура АСУ визначається матрицею $(x_{ij})_{i=\overline{1, m}, j=\overline{1, n}}$, де $x_{ij} = 1$, якщо i -та задача розв'язується в j -му вузлі, і $x_{ij} = 0$ – в протилежному випадку. Необхідно обрати таку структуру АСУ, для якої сумарні витрати на розв'язування задач будуть мінімальними.

Математична модель задачі має такий вигляд

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij} &\rightarrow \min, \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} &= 1, \quad i = \overline{1, m}, \\ \sum_{i=1}^m a_{ij} x_{ij} &\leq b_j, \quad j = \overline{1, n}, \\ x_{ij} &\in \{0, 1\}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Обмеження-нерівності говорять про те, що витрати в кожному j -му вузлі не можуть перевищувати наявних ресурсів, а обмеження-рівності – про те, що АСУ повинна розв'язувати всі m задач, які покладені на неї [7].

Математичні моделі з п. 6.3 та 6.4 розв'язуємо як задачі лінійного програмування [10].

Приклади розв'язання задач

6.1. Знайдіть графічно і чисельно максимальний прибуток і межі прибуткового виробництва для квадратичної функції попиту $P(Q) = 10Q - Q^2$ та функції витрат $C = C_1 + C_2Q$, де $C_1 = 70$, $C_2 = 0.7$

Розв'язання

Фрагмент робочого документа Mathcad із відповідними обчисленнями і коментарями наведено нижче.

Задамо значення постійних і змінних витрат

$$C_1 := 70$$

$$C_2 := 0.7$$

Введемо функцію повних витрат

$$C(Q) := C_1 + C_2 \cdot Q$$

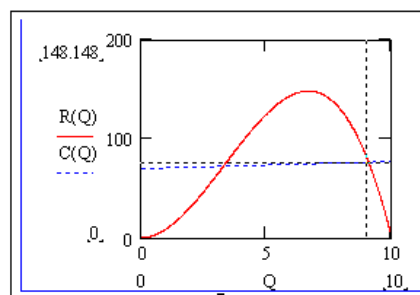
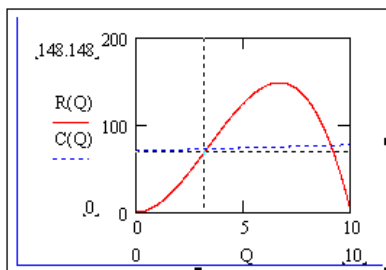
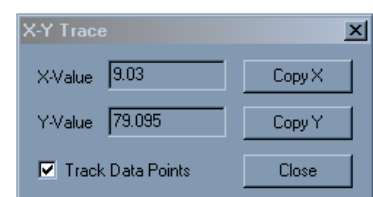
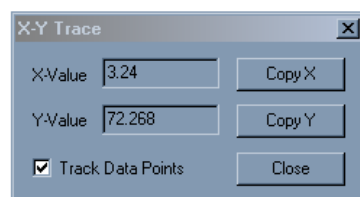
Введемо функцію повного виторгу

$$R(Q) := Q \cdot (-Q^2 + 10Q)$$

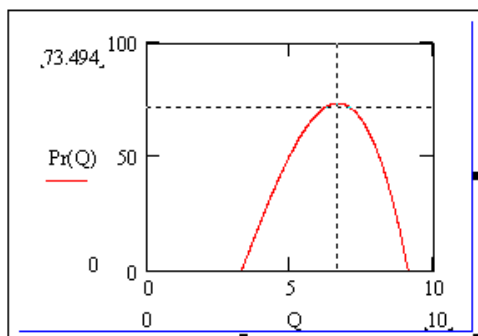
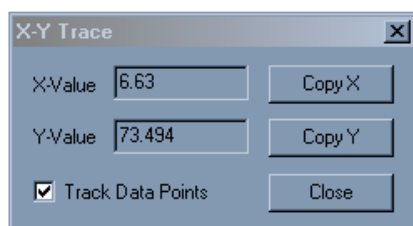
Введемо функцію повного прибутку

$$Pr(Q) := R(Q) - C(Q)$$

Побудуємо на одному малюнку криву повного виторгу та лінію витрат та знайдемо графічно межі прибуткового виробництва



Побудуємо графік функції прибутку та знайдемо графічно максимальний прибуток



Знайдемо межі прибуткового виробництва аналітично

$$R(Q) - C(Q) \text{ solve, } Q \rightarrow \begin{pmatrix} -2.352365574760463283 \\ 3.2799862681141287321 \\ 9.0723793066463345514 \end{pmatrix}$$

Знайдемо значення Q, при якому досягається максимальний прибуток аналітично. Для цього знайдемо похідну функції прибутку і прирівняємо її до нуля, тобто розв'яжемо

$$\text{рівняння } \frac{d}{dQ} Pr(Q) = 0$$

$$\left(\frac{d}{dQ} R(Q) \right) \text{ solve } \rightarrow \begin{pmatrix} 0.03518570507625700065 \\ 6.631480961590409666 \end{pmatrix}$$

$$Q := 6.6314809615904096$$

Отже, максимальний прибуток дорівнює

$$R(Q) = 148.136$$

6.2. Розв'яжіть задачу мінімізації витрат виробництва C , коли ціни на ресурси $p_1 = 2$, $p_2 = 3$ при фіксованому об'ємі виробництва $y_0 = 10$, який визначається квадратичною функцією

$$p_1 + p_1 x_1 + p_2 x_2 - p_1 p_2 x_1^2 - \frac{p_2}{p_1} x_2^2 + p_1 p_2 x_1 x_2 = y_0.$$

Розв'язання

Фрагмент робочого документа Mathcad із відповідними обчисленнями і коментарями наведено нижче.

Задамо ціни на ресурси

$$p1 := 2$$

$$p2 := 3$$

Задамо об'єм виробництва

$$y0 := 10$$

$$y(x1, x2) := p1 + p1 \cdot x1 + p2 \cdot x2 - p1 \cdot p2 \cdot x1^2 - \frac{p2}{p1} \cdot x2^2 + p1 \cdot p2 \cdot x1 \cdot x2 - y0$$

Функція витрат виробництва має вигляд

$$C(x1, x2) := p1 \cdot x1 + p2 \cdot x2$$

Розв'яжемо задачу методом множників Лагранжа.

Запишемо функцію Лагранжа

$$L(x1, x2, \lambda) := C(x1, x2) + \lambda \cdot (y(x1, x2))$$

$$L(x1, x2, \lambda) \rightarrow 2 \cdot x1 + 3 \cdot x2 + \lambda \cdot \left(-8 + 2 \cdot x1 + 3 \cdot x2 - 6 \cdot x1^2 - \frac{3}{2} \cdot x2^2 + 6 \cdot x1 \cdot x2 \right)$$

Знаходимо її частинні похідні по змінним $x1$, $x2$, λ , прирівнюємо їх до нуля та розв'язуємо систему рівнянь

Given

$$\frac{d}{dx1} L(x1, x2, \lambda) = 0$$

$$\frac{d}{dx2} L(x1, x2, \lambda) = 0$$

$$\frac{d}{d\lambda} L(x1, x2, \lambda) = 0$$

$$\text{Find}(x_1, x_2, \lambda) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Отримаємо оптимальну комбінацію ресурсів, при якій витрати при фіксованому об'ємі виробництва $y_0=10$ будуть мінімальними

$$x_1 := 1$$

$$x_2 := 2$$

Отже, мінімальні витрати виробництва дорівнюють

$$C(x_1, x_2) = 8$$

Для того, щоб переконатися, що точка $x_0 = (x_1, x_2)$ є дійсно точкою мінімуму нашої задачі візьмемо близьку до неї точку $(x, y) = (0.9, 2.117)$, координати якої задовольняють обмеження. Значення функції витрат виробництва в цій точці

$$C(0.9, 2.117) = 8.818$$

Оскільки дане значення більше 8, то точка $(1, 2)$ дійсно є точкою мінімуму функції витрат виробництва.

Завдання для самостійної роботи

6.1. Знайдіть графічно і чисельно максимальний прибуток і межі прибуткового виробництва для заданої функції повного виторгу і функції витрат. Виконайте обчислення для функції виторгу $I = AQ - Q^2$ і для функції витрат $C = C_1 + C_2Q$.

№	A	C_1	C_2
1	10	6	0.6
2	10	7	0.9
3	10	6	0.2
4	10	8	0.6
5	20	7	0.9
6	10	8	0.9
7	11	12	0.2
8	12	10	0.6
9	13	10	0.9
10	15	10	0.2
11	12	10	0.5
12	10	9	0.5
13	11	8	0.4
14	11	8	0.5
15	11	8	0.1
16	12	12	0.2
17	12	10	0.7
18	12	10	0.8
19	12	10	0.6
20	12	10	0.9
21	9	5	0.2
22	9	2	0.6
23	9	4	0.9
24	10	8	0.9
25	12	10	0.6
26	12	10	0.9
27	9	5	0.2
28	9	7	0.6
29	15	40	0.9
30	9	5	0.9

6.2. Розв'язати задачу мінімізації витрат виробництва C , коли ціни на ресурси p_1 , p_2 при фіксованому об'ємі випуску продукції y_0 , який визначається виробничою функцією Кобба-Дугласа $a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} = y_0$.

№	p_1	p_2	a_0	a_1	a_2	y_0
1	1,0	3,0	1,4	0,2	0,7	20
2	1,2	3,1	1,3	0,4	0,8	30
3	1,4	3,2	1,2	0,3	0,2	40
4	1,6	3,3	1,1	0,3	0,6	50
5	1,8	3,4	1,0	0,1	0,7	60
6	2,0	3,5	0,9	0,7	0,2	70
7	2,2	3,6	0,8	0,2	0,7	80
8	2,4	3,7	0,7	0,3	0,6	90
9	2,6	3,8	0,6	0,3	0,6	100
10	2,8	3,9	0,5	0,2	0,7	110
11	1,0	3,0	1,4	0,2	0,7	20
12	1,2	3,1	1,3	0,4	0,8	30
13	1,4	3,2	1,2	0,3	0,2	40
14	1,6	3,3	1,1	0,3	0,6	50
15	1,8	3,4	1,0	0,5	0,8	60
16	2,0	3,5	0,9	0,7	0,2	70
17	2,2	3,6	0,8	0,2	0,7	80
18	2,4	3,7	0,7	0,3	0,6	90
19	2,6	3,8	0,6	0,3	0,6	100
20	2,8	3,9	0,5	0,2	0,7	110
21	1,0	3,0	1,4	0,2	0,7	20
22	1,2	3,1	1,3	0,4	0,9	30
23	1,4	3,2	1,2	0,3	0,2	40
24	1,6	3,3	1,1	0,3	0,6	50
25	1,8	3,4	1,0	0,1	0,8	60
26	2,0	3,5	0,9	0,7	0,2	70
27	2,2	3,6	0,8	0,2	0,7	80
28	2,4	3,7	0,7	0,3	0,6	90
29	2,6	3,8	0,6	0,3	0,6	100
30	2,8	3,9	0,5	0,2	0,7	110

7. Алгоритмічні моделі в економіці та підприємстві

7.1. Основні аспекти імітаційного моделювання.

7.2. Моделювання випадкових величин.

7.3. Моделювання випадкових подій.

7.4. Послідовність створення математичних імітаційних моделей.

7.5. Приклади моделювання випадкових величин та подій при імітаційному моделюванні.

***Мета практичної роботи:** ознайомитися з основними аспектами імітаційного моделювання, засвоїти етапи моделювання, навчитись моделювати випадкові величини та події, розв'язувати практичні задачі методом імітаційного моделювання.*

Основний теоретичний матеріал

7.1. Основні аспекти імітаційного моделювання

Управління у сучасному світі стає все більш важкою справою, оскільки організаційна структура суспільства постійно ускладнюється. Ця складність обумовлена характером взаємин між різними елементами організацій і систем, з якими вони взаємодіють. Зміна однієї з характеристик системи може легко привести до змін або створити потребу у змінах інших частин системи. У зв'язку з цим одним з найбільш важливих і корисних знарядь аналізу складних процесів і систем стало імітаційне моделювання.

Імітаційне моделювання – це метод, який дозволяє будувати моделі, що описують процеси так, як вони проходили б насправді. Таку модель можна “програти” в часі як для одного випробування, так і заданої їх множини. При цьому результати визначатимуться випадковим характером процесів. За цими даними можна отримати достатньо стійку статистику. Імітаційне моделювання – це метод дослідження, заснований на тому, що

система, що вивчається, замінюється моделлю, і з нею проводяться експерименти з метою отримання інформації про цю систему. Експериментування з моделлю називають імітацією. Імітувати, відповідно до словника Вебстера, означає "уявити, збагнути суть явища, не вдаючись до експериментів на реальному об'єкті".

Кожен сучасний керівник, якщо він хоче домогтися максимальної ефективності від свого підприємства, повинен періодично застосовувати імітаційне моделювання, тому що воно є найбільш універсальним методом дослідження систем і кількісної оцінки характеристик їхнього функціонування. При імітаційному моделюванні динамічні процеси системи-оригіналу підмінюються процесами, імітованими в абстрактній моделі, але з дотриманням основних правил (режимів, алгоритмів) функціонування оригіналу. У процесі імітації фіксуються визначені події і стани або вимірюються вихідні впливи, за якими обчислюються характеристики якості функціонування системи. Імітаційне моделювання дозволяє розглядати процеси, що відбуваються в системі, практично на будь-якому рівні деталізації. При цьому в імітаційній моделі можна реалізувати практично будь-який алгоритм управлінської діяльності або поведінки системи. Крім того, моделі, що допускають дослідження аналітичними методами, також можуть аналізуватися імітаційними методами. Отже, на сьогодні імітаційні методи моделювання стають основними методами дослідження складних систем.

Всі імітаційні моделі являють собою моделі типу так званої «чорної шухляди». Це означає, що вони забезпечують видачу вихідних параметрів системи, якщо на її взаємодіючі підсистеми надходять вхідні впливи. Тому для одержання необхідної інформації або результатів варто здійснити «прогін» (реалізацію, «репетицію») моделей, а не «вирішувати» них. Імітаційні моделі не здатні формувати своє власне рішення в тім виді, у якому це має місце в аналітичних моделях, а можуть лише служити як засіб для аналізу поведінки системи в умовах, що визначаються експериментатором. Цей на перший погляд недолік, насправді є головним

достоїнством імітаційного моделювання внаслідок того, що доцільність застосування імітаційного моделювання стає очевидною при наявності кожної з наступних умов:

- не існує закінченої математичної постановки задачі, або ще не розроблені аналітичні методи рішення сформульованої математичної моделі;
- аналітичні методи є, але математичні процедури настільки складні і трудомісткі, що імітаційне моделювання дає більш простий спосіб рішення задачі;
- крім оцінки визначених параметрів, бажано здійснити на імітаційній моделі спостереження за ходом процесу протягом деякого часу;
- імітаційне моделювання може виявитися єдиною можливістю внаслідок труднощів постановки експериментів і спостереження явищ у реальних умовах.

Як бачимо, застосування імітаційних моделей дає безліч переваг в порівнянні з виконанням експериментів над реальною системою і використанням інших методів. Наведемо перелік основних переваг використання методів імітаційного моделювання у підприємстві та бізнесі.

Вартість. Нехай компанія звільнила частину співробітників, що надалі привело до зниження якості обслуговування і втрати частини клієнтів. Ухвалити обґрунтоване рішення допомогла б імітаційна модель, витрати на застосування якої складаються лише з ціни програмного забезпечення і вартості консалтингових послуг.

Час. В реальності оцінити ефективність, наприклад, нової мережі розповсюдження продукції або зміненої структури складу можна лише через місяці або навіть роки. Імітаційна модель дозволяє визначити оптимальність таких змін за лічені хвилини, необхідні для проведення експерименту.

Повторюваність. Сучасне життя вимагає від організацій швидкої реакції на зміну ситуації на ринку. Наприклад, прогноз об'ємів попиту

продукції повинен бути складений в строк, і його зміни критичні. За допомогою імітаційної моделі можна провести необмежену кількість експериментів з різними параметрами, щоб визначити якнайкращий варіант.

Точність. Традиційні розрахункові математичні методи вимагають застосування високого ступеня абстракції і не враховують важливі деталі. Імітаційне моделювання дозволяє описати структуру системи і її процеси в природному вигляді, не вдаючись до використання формул і строгих математичних залежностей.

Наочність. Імітаційна модель володіє можливостями візуалізації процесу роботи системи в часі, схематичного завдання її структури і видачі результатів в графічному вигляді. Це дозволяє наочно представити отримане рішення і донести закладені в нього ідеї до клієнта і колег.

Універсальність. Імітаційне моделювання дозволяє вирішувати задачі з будь-яких областей: виробництва, логістики, фінансів, охорони здоров'я та багато інших. В кожному випадку модель імітує, відтворює реальне життя і дозволяє проводити широкий набір експериментів без впливу на реальні об'єкти.

7.2. Моделювання випадкових величин

Для моделювання випадкової величини потрібно знати закон її розподілу. *Найзагальнішим способом* отримання послідовності випадкових чисел є процес формування їх з вихідної послідовності реалізацій випадкової величини, що розподілена в інтервалі $(0; 1)$ згідно з рівномірним законом розподілу.

Згадану послідовність випадкових чисел з рівномірним законом розподілу можна отримати трьома способами:

- використанням таблиць випадкових чисел;
- застосуванням генераторів випадкових чисел;
- методом псевдовипадкових чисел.

Нині використовують псевдовипадкові числа, що відповідають рівномірному закону розподілу. Псевдовипадкові (випадкові) числа – це числа, отримані за деяким правилом (формулою), що імітує значення випадкової величини. Розроблено низку алгоритмів для отримання псевдовипадкових чисел. Датчики псевдовипадкових чисел є складовими більшості програмних комплексів.

Для перетворення послідовності випадкових чисел, що є реалізаціями випадкової величини з рівномірним законом розподілу в інтервалі (0; 1), у послідовність випадкових чисел, що є реалізаціями випадкової величини із заданою інтегральною функцією розподілу $F(x)$, треба із сукупності випадкових чисел з рівномірним законом розподілу в інтервалі (0; 1) вибрати випадкове число ξ і розв'язати рівняння:

$$F(x) = \xi \quad (7.1)$$

відносно x .

У випадку, коли задана функція щільності ймовірності $f(x)$, співвідношення (7.1) набирає вигляду:

$$\int_{-\infty}^x f(x) dx = \xi. \quad (7.2)$$

Для низки законів розподілу отримано аналітичний розв'язок рівняння (7.2), результат якого наведено в таблиці 7.1.

Таблиця 7.1

ФОРМУЛИ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Закони розподілу випадкової величини	Щільність розподілу	Формули для моделювання випадкових величин
Експоненційний	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$	$x_i = -\frac{1}{\lambda} \ln \xi_i$
Вейбула	$f(x) = \frac{a}{b} \left(\frac{x}{a}\right)^{a-1} \exp \left[-\left(\frac{x}{b}\right)^a \right]$	$x_i = -b(\ln \xi_i)^{1/a}$
Гама-розподіл (η – цілі числа)	$f(x) = \frac{\lambda^\eta}{\Gamma(\eta)} e^{-\lambda x} x^{\eta-1}$	$x_i = -\frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{\eta} \ln(1 - \xi_{ij})$
Нормальний	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	$x_i = m + \sigma \left(\sum_{j=1}^{12} \xi_{ij} - 6 \right)$

7.3. Моделювання випадкових подій

Моделювання випадкових подій полягає у відтворенні факту появи чи не появи випадкової події відповідно до заданої ймовірності. Моделювання повної групи несумісних подій $A_1, A_2, \dots, A_n$, ймовірності котрих $P(A_i) = p_i$, $i = 1, \dots, n$ відомі, можна привести до моделювання дискретної випадкової величини Y , яка має закон розподілу $P(y_i) = p_i$, де ймовірність її можливих значень

$$P(y_i) = P(A_i) = p_i.$$

Тобто прийняття дискретною випадковою величиною Y можливого значення y_i еквівалентне появі події A_i . Для практичної реалізації даного способу спочатку на одиничному відрізку числової осі відкладають інтервали $\Delta i = p_i$.

Генерують рівномірно розподілену на інтервалі $(0; 1)$ випадкову величину, реалізацією котрої є випадкове число ξ_j , і перевіряють умову:

$$\sum_{i=1}^{k-1} p_i \leq \xi_j < \sum_{i=1}^k p_i. \quad (7.3)$$

При виконанні умови (7.3) вважають, що за цього випробування відбулася подія A_k .

Розглянемо *приклад*. Ймовірність появи події A у кожному випробуванні дорівнює $P(A) = 0,82$. Необхідно змоделювати три випробування і визначити послідовність реалізації події A .

Розв'язання. Відкладемо на одиничному відрізку числової осі точку $E = 0,82$ і вважатимемо, що коли випадкове число $\xi_i < E$, то у випробуванні настала подія A . У протилежному випадку (при $\xi_i \geq E$) настала подія не A ($\bar{A}$), тобто подія A не мала місця.

Припустимо, наприклад, що з відповідної таблиці обрані випадкові числа $\xi_1 = 0,915$, $\xi_2 = 0,123$, $\xi_3 = 0,075$. Тоді за трьох випробувань отримаємо таку послідовність реалізації подій: $\bar{A}, A, A$.

Моделювання сумісних (залежних і незалежних) подій можна виконати двома способами.

Перший спосіб. На першому етапі моделювання визначають усі можливі варіанти появи сумісних подій у випробуванні. Знаходять повну групу несумісних подій та обчислюють їх імовірності.

На другому етапі вчиняють так само, як і в моделюванні повної групи несумісних подій.

Наведемо *приклад*. Нехай при випробуванні мають місце залежні й сумісні події A та B , при цьому відомо, що $P(A) = 0,7$; $P(B) = 0,5$; $P(AB) = 0,3$.

Потрібно змодельовати появу подій A та B у двох випробуваннях.

Розв'язання. У кожному випробуванні можливі чотири несумісних результати, тобто настання чотирьох подій:

1. $C_1 = AB, P(C_1) = P(AB) = 0,3$.
2. $C_2 = A\bar{B}, P(C_2) = P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB) = 0,7 - 0,3 = 0,4$.
3. $C_3 = \bar{A}B, P(C_3) = P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB) = 0,5 - 0,3 = 0,2$.
4. $C_4 = \bar{A}\bar{B}, P(C_4) = 1 - [P(C_1) + P(C_2) + P(C_3)] = 1 - (0,3 + 0,4 + 0,2) = 0,1$.

Змодельуємо повну групу подій C_1, C_2, C_3, C_4 у двох випробуваннях (прогонах). Попередньо на одиничному відрізку числової осі (рис. 7.1) послідовно відкладемо інтервали:

$$\Delta_i = P(C_i), i = 1, \dots, 4.$$

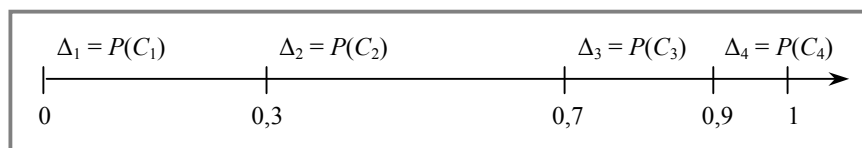


Рис. 7.1. Інтервали $\Delta_i = P(C_i)$

Нехай отримано (взято з відповідної таблиці) випадкові числа $\xi_1 = 0,68$ і $\xi_2 = 0,95$.

Випадкове число ξ_1 належить до інтервалу Δ_2 , тому при першому випробуванні мала місце подія A , а подія B не настала. За другого

випробування випадкове число ξ_2 належить до інтервалу Δ_4 . Обидві події A та B не мали місця.

Другий спосіб. Моделювання сумісних подій полягає у розігруванні факту появи кожної із сумісних подій окремо, при цьому, якщо події залежні, треба попередньо визначити умовні ймовірності.

Розглянемо *приклад*. Використовуючи умови попереднього прикладу, потрібно змоделювати окрему появу подій A та B в одному випробуванні.

Розв'язання. Події A та B є залежними, тому попередньо знаходимо умовні ймовірності $P(B/A)$ та $P(B/\bar{A})$:

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0,3}{0,7} = \frac{3}{7} \approx 0,43;$$
$$P(B/\bar{A}) = \frac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})} = \frac{0,2}{1-0,7} = \frac{2}{3} \approx 0,67.$$

Для моделювання події A обрано випадкове число ξ_1 . Нехай $\xi_1 = 0,96$. Оскільки $\xi_1 > P(A)$, то подія A у випробуванні не настала.

Тепер розіграємо подію B за умови, що подія A у випробуванні не мала місця. Нехай випадкове число $\xi_2 = 0,22$. Отже, $\xi_2 < P(B/\bar{A})$ ($0,22 < 0,67$), тобто маємо, що подія B за випробування настала.

7.4. Послідовність створення математичних імітаційних моделей

У процесі створення та машинної реалізації математичних імітаційних моделей здійснюють такі (узагальнені) етапи [12]:

- побудова концептуальної моделі;
- побудова алгоритму згідно з концептуальною моделлю системи;
- створення комп'ютерної програми;
- машинні експерименти з моделлю системи.

7.4.1. Побудова концептуальної моделі

Побудова концептуальної моделі складається з таких кроків:

- постановка задачі моделювання;

- визначення вимог щодо первісної інформації та способів її отримання;
- формування гіпотез і припущень;
- визначення параметрів та змінних моделі;
- обґрунтування вибору показників і критеріїв ефективності системи;
- складання змістовного опису моделі.

У здійсненні постановки задачі моделювання економічних об'єктів і процесів використовується чітке формулювання цілей і задач дослідження реальної системи, обґрунтовується необхідність імітаційного (комп'ютерного) моделювання, обирається методика розв'язування задачі з урахуванням наявних ресурсів, визначаються необхідність і можливість декомпозиції задачі на окремі взаємопов'язані підзадачі тощо.

При зборі необхідної вихідної інформації треба звертати увагу на те, що, власне, від якості вихідної інформації про об'єкт дослідження і моделювання залежить як адекватність моделі, так і достовірність результатів моделювання.

Гіпотези при побудові моделі системи слугують для заповнення «прогалін» щодо розуміння та формалізації задачі. Припущення дають можливість провести необхідні спрощення моделі на підставі раціональних гіпотез. У процесі роботи з моделлю системи, як правило, можливим є багаторазове повернення до цього етапу залежно від отриманих результатів моделювання і нової інформації (розуміння) про об'єкт.

Під час визначення параметрів і змінних складається перелік вихідних і керуючих змінних, а також зовнішніх (екзогенних) і внутрішніх (ендогенних) параметрів системи.

Обрані показники і критерії ефективності системи повинні відображати мету (цілі) функціонування системи і являти собою функції змінних і параметрів системи.

Розроблення концептуальної моделі завершується складанням змістовного опису, котрий використовується як основний документ, що

характеризує результати опрацювання концептуальної постановки задачі (розуміння її всіма суб'єктами, зацікавленими у результатах дослідження).

7.4.2. Побудова алгоритму згідно з концептуальною моделлю системи

Побудова алгоритму містить такі складові:

- побудова логічної схеми алгоритму;
- формування математичних співвідношень (аналітичних моделей);
- перевірка достовірності алгоритму.

Спочатку, як правило, створюють узагальнену схему моделюючого алгоритму, котра задає загальний порядок (хід) дій в імітаційному моделюванні досліджуваного процесу. Після цього розробляється детальна схема, кожний елемент якої перетворюється в оператор (групу операторів) програми.

Перевірка достовірності алгоритму повинна дати відповідь на запитання, наскільки адекватно і точно він відображає сутність модельованого процесу (у конкретній ситуації) та побудованої концептуальної моделі.

7.4.3. Створення комп'ютерної програми

Розроблення програми для ПК включає такі кроки:

- вибір обчислювальних засобів;
- програмування (чи налаштування відповідних параметрів існуючих програмно-методичних комплексів);
- тестування програмних засобів.

На останньому кроці необхідно, зокрема, оцінити тривалість виконання програми на комп'ютері (витрати часу) для здійснення однієї реалізації (прогону) модельованого процесу, що дасть змогу системному аналітикові правильно сформулювати вимоги щодо точності й достовірності результатів моделювання.

7.4.4. Проведення машинних експериментів з моделлю системи

На цьому етапі проводяться серійні обчислення за допомогою програми. Етап складається з таких кроків:

- планування машинного експерименту;
- проведення робочих обчислень;
- відповідне подання результатів моделювання (у табличній та графічній формах);
- подання рекомендацій щодо оптимізації режиму функціонування реальної системи.

Перед здійсненням робочих обчислень на комп'ютері доречно скласти план проведення експерименту з переліком комбінацій змінних і параметрів, за яких повинно відбутися моделювання системи. Завдання полягає у розробці оптимального плану експерименту, реалізація якого дозволить за порівняно невеликої кількості тестувань моделі отримати достовірні дані про закономірності функціонування реальної системи.

Результати моделювання можуть бути подані у вигляді таблиць, графіків, діаграм, схем тощо. Зазвичай найпростішою формою вважаються таблиці, хоча графіки ілюструють результати моделювання економічного об'єкта (системи) у більш наочній формі. Доцільно передбачити інтерактивний режим функціонування комплексу, виведення результатів на екран дисплея та на принтер.

Інтерпретація результатів моделювання має на меті перехід від інформації, отриманої в результаті машинного експерименту з моделлю, до висновків щодо процесу функціонування об'єкта-оригіналу [5].

Наприклад, можна виділити наступні етапи проекту по імітаційному моделюванню логістичної системи

1. Концептуальна постановка завдання і аналіз:

1. первинне ознайомлення з об'єктом дослідження;
2. розробка переліку необхідних даних для виконання проекту.

2. Складання і підписання технічного завдання (ТЗ) і договору на виконання проекту.

3. Збір і обробка початкових даних:

1. формування початкової інформаційної бази – збір і обробка статистичних даних, інтерв'ювання і анкетування співробітників;

2. дослідження і аналіз наявної інформації.

4. Побудова імітаційної моделі.

5. Перевірка і узгодження імітаційної моделі.

6. Проведення чисельних експериментів, аналіз результатів.

7. Видача рекомендацій по удосконаленню логістичної (виробничої, складської) системи замовника.

8. При необхідності видача рекомендацій по впровадженню автоматизованої системи управління, диспетчеризації виробництва, транспорту, складу.

7.5. Приклади моделювання випадкових величин та подій при імітаційному моделюванні

Алгоритмічне (імітаційне) моделювання – це числовий метод дослідження систем і процесів за допомогою моделюючого алгоритму.

Кожного разу, коли на хід модельованого процесу впливає випадковий чинник, його вплив імітується за допомогою спеціально організованого розіграшу (жеребкування). Таким способом будується випадкова реалізація модельованого явища, яка є одним із результатів дослідження. За результатами окремого досліду, звичайно, не можна робити висновок щодо закономірностей досліджуваного процесу. Але за великої кількості реалізацій середні характеристики (математичне сподівання, мода, медіана), що їх виробляє (генерує) модель, набувають стійких властивостей, котрі посилюються зі зростанням кількості

реалізацій (прогонів). Звісно, залишається певний ризик, існує неповнота даних, тощо.

Кидання жеребка можна здійснити вручну (вибором із таблиці випадкових чисел), але зручніше це робити за допомогою спеціальних програм, що входять до складу програмного забезпечення комп'ютера. Такі програми називають *датчиками* чи *генераторами випадкових чисел*.

У складі трансляторів майже всіх алгоритмічних мов є стандартні процедури (чи функції), котрі генерують випадкові (точніше, псевдовипадкові) числа, що є реалізаціями послідовності випадкових чисел із рівномірним законом розподілу.

Наприклад, у складі транслятора мови Visual Basic – стандартна функція RND, що видає випадкові дійсні числа одинарної точності в інтервалі (0; 1). Звернення до цієї функції може мати вигляд $\xi = \text{RND}$, де ξ – можливе значення (реалізація) випадкової величини, яка рівномірно розподілена на інтервалі (0; 1).

7.5.1. Моделювання простої події

Нехай має місце подія A , імовірність настання якої дорівнює $P(A)$. Потрібно обрати правило, у багаторазовому використанні якого частота появи події прямувала б до її ймовірності. Оберемо за допомогою датчика випадкових чисел, що мають рівномірний закон розподілу на інтервалі (0;1), деяке число ξ і визначимо ймовірність того, що $\xi < P(A)$. Для випадкового числа ξ , котре є реалізацією випадкової величини з рівномірним законом розподілу на інтервалі (0; 1), справедливою буде така залежність:

$$P(\xi < P(A)) = \int_0^{P(A)} f(x) dx = P(A).$$

Отже, імовірність потрапляння випадкової величини в інтервал (0; $P(A)$) дорівнює величині $P(A)$. Тому, якщо під час розіграшу число потрапило в цей інтервал, то слід вважати, що відбулася подія A .

Протилежна подія ($\bar{A}$) відбудеться з імовірністю $(1 - P(A))$ у тому разі, коли $\xi \geq P(A)$.

Процедура моделювання простої події в імітаційній моделі описується алгоритмом, схема якого подана на рис. 7.2. (ДВЧ(ξ) – датчик випадкових чисел ξ , що відповідають рівномірному закону розподілу на інтервалі $(0; 1)$.)

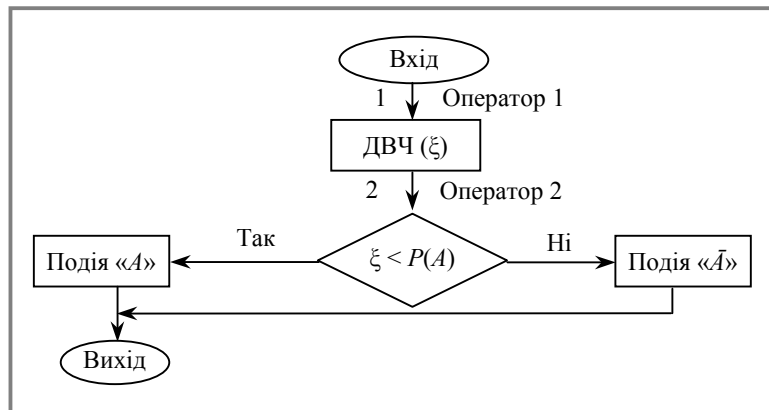


Рис. 7.2. Моделювання простої події

Оператор 1 звертається до датчика випадкових чисел, який генерує випадкове число ξ .

Оператор 2 здійснює перевірку умови $\xi < P(A)$. Якщо вона виконується, вважається, що відбулася подія A . У протилежному випадку вважається, що відбулася протилежна подія ($\bar{A}$) [5].

7.5.2. Моделювання повної групи несумісних подій

Нехай наявна повна група випадкових несумісних подій (ПГНП) $A_1, A_2, \dots, A_k$ з імовірностями $p_1, p_2, \dots, p_k$. При цьому виконується умова:

$$\sum_{i=1}^k p_i = 1.$$

Поділимо інтервал $(0; 1)$ на k відрізків, довжини яких відповідно дорівнюють $p_1, p_2, \dots, p_k$.

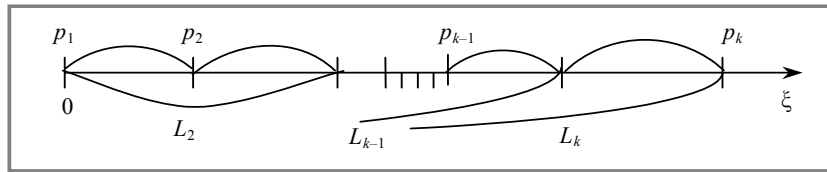


Рис. 7.3. Моделювання повної групи несумісних подій

Якщо випадкова величина ξ , яка генерується датчиком випадкових чисел, що відповідають рівномірному закону розподілу на інтервалі $(0; 1)$, припадає, наприклад, на відрізок p_{k-1} , то це повинно означати, що відбулася подія A_{k-1} .

Справді, якщо позначити $L_j = \sum_{i=1}^j p_i$, то виявиться справедливим вираз

$$P(L_{k-2} < \xi < L_{k-1}) = \int_{L_{k-2}}^{L_{k-1}} d\xi = p_{k-1}.$$

Процедура моделювання повної групи несумісних подій описується алгоритмом, схема якого наведена на рис. 7.4.

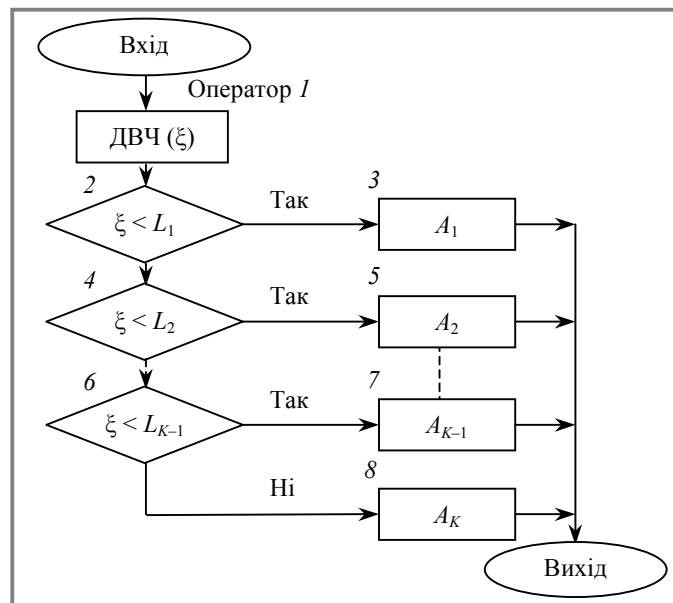


Рис. 7.4. Схема алгоритму моделювання повної групи несумісних подій

Оператор 1 звертається до генератора випадкових чисел, що відповідають рівномірному закону розподілу на інтервалі $(0; 1)$. Оператор 2 перевіряє умову потрапляння випадкової величини ξ в інтервал $(0; L_1)$. Якщо ця умова виконується, то вважається, що відбулася подія A_1 . Якщо

ця умова не виконується, то алгоритм передбачає перевірку умов потрапляння випадкової величини в інші інтервали [5].

7.5.3. Моделювання дискретної випадкової величини

Розподіл дискретної випадкової величини може бути поданий у вигляді таблиці

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
p_i	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Тут p_j – імовірність того, що випадкова величина x набуває значення $x_j, j = 1, \dots, n$.

Накладається також умова:

$$\sum_{j=1}^n p_j = 1. \quad (7.4)$$

Поділимо інтервал $(0; 1)$ на n відрізків, довжини котрих дорівнюють заданим імовірностям. Якщо випадкове число ξ , що формується генератором випадкових чисел, котрі відповідають рівномірному закону розподілу на інтервалі $(0; 1)$, потрапляє до інтервалу p_k , то випадкова величина x набуває значення x_k . Отже, під час моделювання дискретної випадкової величини фактично використовується та сама процедура, що й за моделювання повної групи несумісних подій.

7.5.4. Моделювання випадкових величин з рівномірним розподілом

Генератор випадкових чисел генерує послідовність реалізацій випадкової величини ξ з рівномірною функцією розподілу на інтервалі $(0; 1)$. Здебільшого треба моделювати випадкові величини з рівномірним розподілом, які набувають значення в інтервалі $(a; b)$.

Припустимо, що

$$\xi = F(x) = \frac{x - a}{b - a},$$

звідси

$$x = a + \xi(b - a).$$

На практиці використовується дещо модифікований спосіб. Замість меж інтервалу задаються: середнє значення випадкової величини $m(\xi)$ і величина (довжина) інтервалу Δx , у межах якої може набувати свої значення ця випадкова величина (з рівномірним законом розподілу). Визначення можливого значення (реалізації) випадкової величини з рівномірним розподілом можна здійснити згідно з виразом:

$$x = m(\xi) + \Delta x(\xi - 0,5).$$

7.5.5. Моделювання випадкових величин з нормальним законом розподілу

Згідно з центральною граничною теоремою теорії ймовірностей унаслідок додавання досить великої кількості однаково розподілених незалежних випадкових величин отримуємо випадкову величину, яка має нормальний закон розподілу.

Як показали дослідження, вже внаслідок складання більш ніж десяти випадкових незалежних величин з рівномірним розподілом в інтервалі (0; 1) отримуємо випадкову величину, котру з точністю, достатньою для більшості практичних задач, можна вважати розподіленою згідно з нормальним законом.

Процедура розіграшу нормально розподіленої випадкової величини полягає у такому:

1) Складаємо, наприклад, 12 незалежних випадкових величин, які мають рівномірний закон розподілу та які набувають значення в інтервалі $(0; 1)$, тобто:

$$v = \sum_{i=1}^{12} \xi_i.$$

Використовуючи відомі теореми про математичне сподівання суми незалежних випадкових величин з однаковим законом розподілу та дисперсію цієї суми, легко обчислити для випадкової величини v математичне сподівання $m(v)$ та дисперсію $D(v)$:

$$m(v) = \sum_{i=1}^{12} m(\xi_i) = 12 \left(\frac{1}{2} \right) = 6,$$

оскільки для рівномірного закону розподілу математичне сподівання

$$M(x) = \frac{b+a}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2};$$

$$D(v) = \sum_{i=1}^{12} D(\xi_i) = 12 \left(\frac{1}{12} \right) = 1,$$

оскільки для рівномірного закону розподілу дисперсія

$$D(x) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(1-0)^2}{12} = \frac{1}{12};$$

$$\sigma(v) = \sqrt{D(v)} = 1.$$

2) Нормуємо та центруємо випадкову величину v , тобто перейдемо до випадкової величини η , яка має нульове математичне сподівання та середньоквадратичне відхилення $\sigma(\eta) = 1$.

$$\eta = \frac{[v - m(v)]}{\sigma(v)} = v - 6.$$

Від нормованої та центрованої випадкової величини η можна перейти до випадкової величини y із заданими параметрами $m(y)$ і $\sigma(y)$ згідно з таким виразом:

$$y = m(y) + \eta \sigma(y).$$

Приклади розв'язання задач

7.1. Приклад імітаційного моделювання організації бізнесу

Розглянемо задачу про створення підприємства, яка детально описана у навчальному посібнику Вітлінського В.В. «Моделювання економіки» [5].

Підприємець збирається вкласти кошти в будівництво нового підприємства, котре випускатиме певну продукцію, що користується попитом на ринку. Аналогічну продукцію випускають і інші фірми, тому доведеться діяти в умовах конкуренції.

Існує можливість приблизно оцінити майбутні експлуатаційні витрати з випуску продукції, тобто вважати відомими математичне сподівання (чи середнє значення) і середньоквадратичне відхилення очікуваних витрат. Можна також припустити гіпотезу, за якою витрати матимуть нормальний закон розподілу із заданими параметрами.

Припускається, що місткість ринку (випадкова величина) має, наприклад, нормальний закон розподілу (з відомими параметрами – математичним сподіванням і середньоквадратичним відхиленням).

Гірші справи – стосовно до інформації для визначення характеристик тієї частки ринку, котру може зайняти це підприємство після введення його в експлуатацію. Припустимо, що єдине, що вдасться передбачити, – це середня величина частки цього ринку. Вид розподілу здебільшого невідомий, і немає достатніх підстав для того, щоб вважати розподіл нормальним.

У цьому випадку доречно використати розподіли з іншого їх класу (наприклад, рівномірний чи інтервально-рівномірний). Доцільно розглянути кілька варіантів розподілу та проаналізувати реакцію моделі на зміни як обраних функцій розподілу, так і їхніх параметрів.

За показник ефективності роботи підприємства доречно обрати, зокрема, прибуток від реалізації продукції, знаходячи максимум гарантованого прибутку за заданого ступеня одного з кількісних

показників ризику. Якщо для цього є підстави, то береться гіпотеза, що випадкова величина прибутку має нормальний закон розподілу.

Отже, сформуємо *концептуальну модель*, яка враховує таке:

1. Випуск продукції пов'язаний з експлуатаційними витратами (випадкова величина R_v), котрі мають (за гіпотезою) нормальний закон розподілу із заданими параметрами: математичним сподіванням витрат (m_v) і середньоквадратичним відхиленням витрат (σ_v);

2. Місткість ринку, де має реалізуватись продукція підприємства, також є випадковою величиною (R_{ryn}), яка має (за припущенням) нормальний закон розподілу із заданими параметрами: математичним сподіванням місткості ринку (m_{ryn}) і середньоквадратичним відхиленням місткості ринку (σ_{ryn});

3. Частка підприємства на ринку є невизначеною і може бути задана деякою випадковою величиною з певною функцією розподілу (наприклад інтервально-рівномірною функцією);

4. Вважатимемо, що прибуток підприємства є випадковою величиною (R_{pr}), котра визначається з виразу:

$$R_{pr} = R_{ryn} \cdot d_{ryn} - R_v, \quad (7.5)$$

де R_{pr} – випадкова величина прибутку підприємства; R_{ryn} – випадкова величина місткості ринку; d_{ryn} – випадкова величина частки ринку підприємства; R_v – випадкова величина експлуатаційних витрат підприємства.

Результуючими характеристиками моделі вважатимемо:

– суму значень R_{pr}^i випадкової величини R_{pr} для N_p реалізацій (імітаційних прогонів):

$$S_{pr} = \sum_{i=1}^{N_p} R_{pr}^i; \quad (7.6)$$

– суму квадратів значень випадкової величини прибутку для N_p реалізацій (імітаційних прогонів):

$$S_{pr}^2 = \sum_{i=1}^{N_p} (R_{pr}^i)^2. \quad (7.7)$$

Показником ефективності функціонування підприємства оберемо гарантований прибуток за заданого рівня ризику, який визначатимемо за формулою:

$$G_{pr} = m_{pr} - k_{\alpha} \cdot \sigma_{pr},$$

де G_{pr} – гарантований обсяг прибутку згідно із заданим значенням показника ризику α ; m_{pr} – оцінка математичного сподівання прибутку

$$m_{pr} = \frac{S_{pr}}{N_p};$$

σ_{pr} – оцінка середньоквадратичного відхилення прибутку:

$$\sigma_{pr} = \sqrt{\frac{1}{N_p - 1} (S_{pr}^2 - N_p m_{pr}^2)}; \quad (7.8)$$

k_{α} – квантиль нормального закону розподілу відповідно до заданого значення компоненти (α) вектора ризику, наприклад, якщо $\alpha = 0,1$, то $k_{\alpha} = 1,28$ (визначається за таблицями щільності нормального закону розподілу).

Вплив кожного з урахованих чинників імітується за допомогою спеціально організованого жеребкування (розігрування). Таким чином будується одна випадкова реалізація модельованого явища, котра являє собою один результат дослідження (один прогон). За великої кількості реалізацій досліджень (прогонів) середні характеристики (математичне сподівання, мода, медіана), що їх виробляє (генерує) модель, набувають стійких властивостей.

Для моделювання неперервних і дискретних випадкових величин x з відомими функціями розподілу можна використати генератор випадкових чисел, що генерує випадкове число ξ , а після цього, здійснюючи

обчислення за відповідними формулами, отримати реалізацію x випадкової величини x .

Наприклад, моделювання випадкової величини з довільним розподілом можна здійснити за такою схемою.

Нехай є підстави подати (наближено) функцію розподілу випадкової величини x , яка задана на відрізку $[a_0, a_n]$, інтервально-постійною функцією щільності розподілу $f(x)$. Це означає, що відрізок розподіляється на n часткових відрізків так, щоб імовірність розподілу на кожному з них була (наближено) однаковою (рис. 7.5).

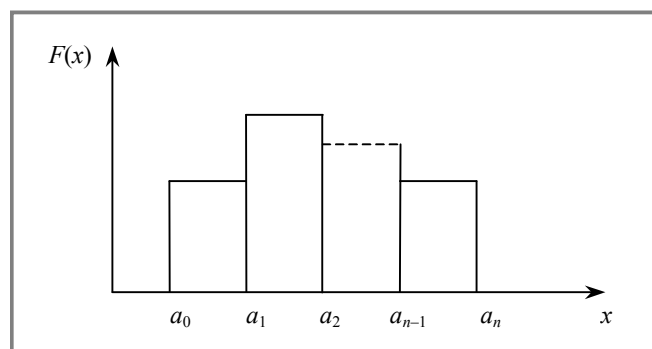


Рис. 7.5. Наближена інтервально-постійна функція щільності розподілу випадкової величини з довільним розподілом

Доцільно обрати величини a_k , $k = 0, 1, \dots, n$ так, щоб імовірності (P_k) потрапляння випадкової величини в будь-який частковий відрізок були однаковими, тобто:

$$\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x) dx = \frac{1}{n}, \quad k=1, \dots, n. \quad (7.9)$$

З умови, що $f(x) = \text{const}$ на кожному частковому інтервалі, випливає, що випадкова величина X може бути визначена за формулою:

$$x_k = a_{k-1} + \xi(a_k - a_{k-1}), \quad k=1, \dots, n, \quad (7.10)$$

де ξ – реалізація випадкової величини, рівномірно розподіленої на інтервалі $(0; 1)$; a_{k-1} – ліва межа часткового відрізка; a_k – права межа часткового відрізка.

Потрапляння у будь-який частковий інтервал можна розглядати як подію, що входить до складу повної групи несумісних подій. Тому процедура моделювання у загальному випадку полягає у такому:

1. За допомогою генератора випадкових чисел (ГВЧ), що виробляє величину ξ , моделюємо дискретну випадкову величину – номер інтервалу k .

2. Повторно розігруємо випадкову величину ξ і визначаємо значення (реалізацію) випадкової величини X за формулою (7.10). Блок-схема алгоритму показана на рис. 7.6.

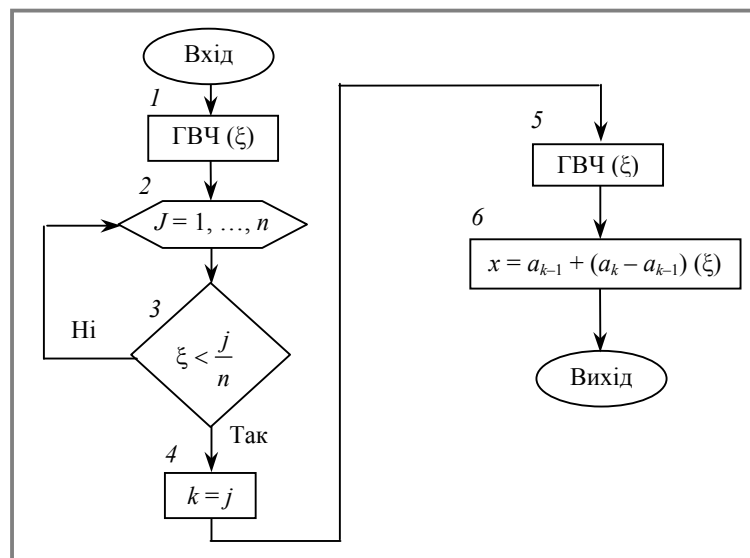


Рис. 7.6. Блок-схема алгоритму моделювання випадкової величини, яка має довільну функцію розподілу

Узагальнений алгоритм моделі

Загальний вигляд (макет) стартової форми (як зразок) наведено на рис. 7.7.

Введення вихідних даних для подальших обчислень					
Параметри	Середні значення		Середньоквадратичні відхилення		
Експлуатаційні витрати	m_v		σ_v		
Місткість ринку	m_{ryn}		σ_{ryn}		
Кількість прогонів (випадкових реалізацій)			Кількість точок на графіку		
N_p			$n + 1$		
Координати точок					
Номер точки (координата)	1	2	3	...	$n + 1$
Координата	a_0	a_1	a_2	...	a_n
Результати моделювання					
Середній прибуток	Середньоквадратичне відхилення		Гарантований прибуток за заданого ризику		
m_{pr}	σ_{pr}		G_{pr}		

Рис. 7.7. Макет стартової форми

У макет включені такі об'єкти управління: кілька міток із назвами об'єктів; поля для коригування вихідних даних, а також поля для виводу результатів моделювання.

Узагальнена схема алгоритму обчислення величини G_{pr} наведена на рис. 7.8.

Подамо сутність операторів узагальненої схеми, наведеної на рис. 7.8.

Оператор 1 здійснює введення вхідних даних та всіх необхідних параметрів.

Оператор 2 є початком циклу прогонів випадкових реалізацій. Цикл завершується, коли $I = N_p$.

Оператор 3 звертається до процедури, що генерує можливе значення нормованих (нормалізованих) і центрованих випадкових величин, які розподілені згідно з нормальним законом розподілу.

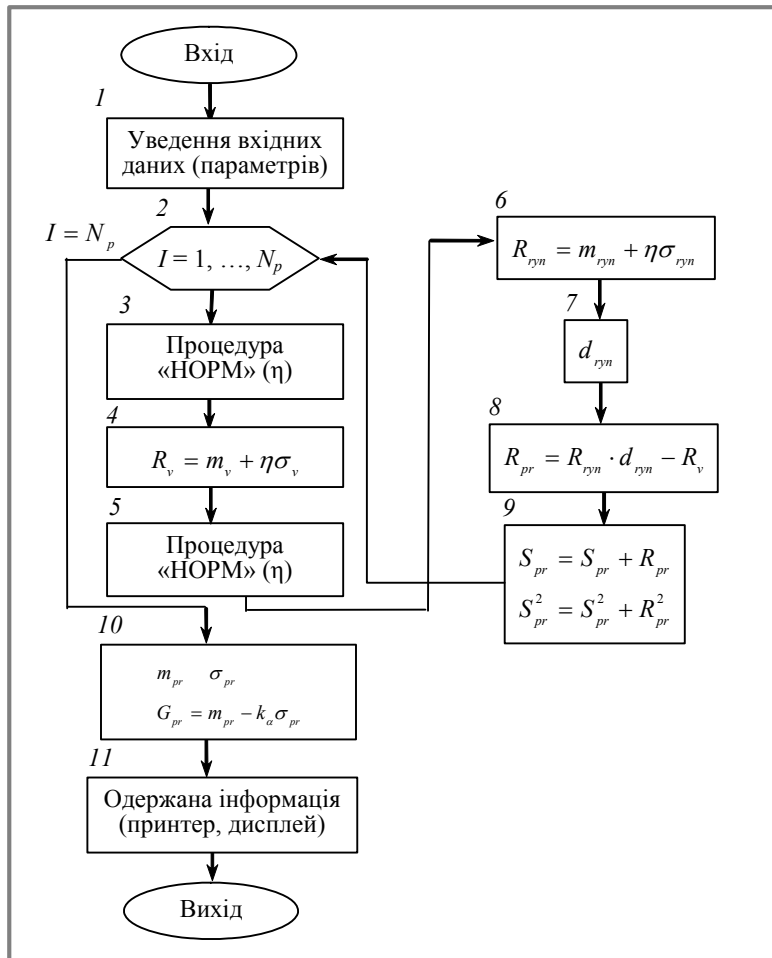


Рис. 7.8. Узагальнений алгоритм обчислення величини G_{pr}

Оператор 4 обчислює випадкове значення експлуатаційних витрат.

Оператори 5 і 6 аналогічно попередньому визначають випадкову величину місткості ринку.

Оператор 7 звертається до процедури, котра визначає реалізацію випадкового значення частки підприємства на ринку. Ця випадкова величина генерується, зокрема, згідно з описаною вище процедурою моделювання випадкових величин з довільним розподілом.

Оператор 8 визначає за формулою (7.5) обсяг випадкового значення величини прибутку для однієї реалізації модельованого процесу.

В операторі 9 здійснюється накопичення суми прибутків і суми квадратів прибутків для всіх прогонів і відповідних реалізацій цих випадкових величин (формули (7.6), (7.7)).

Після завершення випадкових реалізацій оператор 10 здійснює за наведеними вище формулами обчислення величин m_{pr} , σ_{pr} , G_{pr} .

Оператор 11 виводить результати моделювання на монітор (чи на принтер).

Числовий приклад

Нехай відомі такі дані:

m_v – середнє значення експлуатаційних витрат (у грн): $m_v = 11\,000$;

σ_v – середньоквадратичне відхилення експлуатаційних витрат: $\sigma_v = 11\,000$;

m_{ryn} – середнє значення місткості ринку: $m_{ryn} = 2\,780\,000$;

σ_{ryn} – середньоквадратичне відхилення місткості ринку: $\sigma_{ryn} = 250\,000$;

N_p – кількість випадкових реалізацій: $N_p = 1000$.

Змінюваними параметрами вважатимемо параметри закону розподілу частки підприємства на ринку.

Розглянемо три варіанти розподілу.

Для першого варіанта припустимо, що кількість граничних точок $n = 2$ (діапазон зміни цієї випадкової величини складається з однієї ділянки). Закон розподілу є рівномірним. Нехай середнє значення частки ринку дорівнює 0,1. Оберемо такі значення координат граничних точок: $a_0 = 0,099$; $a_1 = 0,101$. Отже, для першого варіанта ступінь невизначеності досить невеликий. Частка підприємства на ринку практично постійна (становить 10 % його загальної місткості).

Для другого варіанта припустимо, що кількість граничних точок становить: $n = 6$ (діапазон складається з п'яти ділянок). Нехай маємо те саме середнє значення $(0,1)$. Граничні точки розташовані симетрично відносно середнього значення. Оберемо такі значення їхніх координат:

$$a_0 = 0,035; a_1 = 0,075; a_2 = 0,095; a_3 = 0,105; a_4 = 0,125; a_5 = 0,165.$$

Імовірності розподілу на окремих ділянках визначатимемо за умови, що всі вони однакові й дорівнюють $\frac{1}{n-1}$. Тобто $\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)dx = \frac{1}{n-1}$. Тоді

$f_k = \frac{1}{n-1} : (a_k - a_{k-1})$, звідки легко знайти відповідні значення щільності розподілу на кожній із п'яти ділянок:

$$f_1 = 5; f_2 = 10; f_3 = 20; f_4 = 10; f_5 = 5.$$

Вид розподілу подано на рис. 7.9.

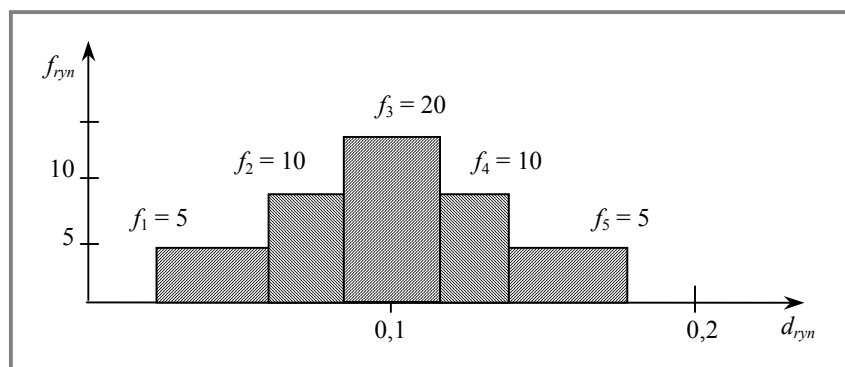


Рис. 7.9. Інтервально-рівномірний закон розподілу частки на ринку (другий варіант)

Отже, для другого варіанта частка підприємства на ринку характеризується значним ступенем невизначеності й зумовленого цим ризику. Випадкова величина цієї частки нерівномірно розподілена в діапазоні від 0,035 до 0,165.

Для третього варіанта відомо, що кількість граничних точок n дорівнює шести (діапазон складається з п'яти ділянок). Середнє значення (математичне сподівання) цієї випадкової величини нехай, як і в попередніх варіантах, становить 0,1. Граничні точки розташовані

асиметрично відносно математичного сподівання. Відомі такі значення їхніх координат:

$$a_0 = 0,035; a_1 = 0,075; a_2 = 0,095; a_3 = 0,105; a_4 = 0,155; a_5 = 0,255.$$

Щільності розподілу на кожній із п'яти ділянок становлять відповідно:

$$f_1=5; f_2=10; f_3=20; f_4=4; f_5=2.$$

Дані щодо цих трьох варіантів стосовно частки підприємства на ринку можна подати таблицею (табл. 7.2).

Таблиця 7.2

ПАРАМЕТРИ ЧАСТКОВО-РІВНОМІРНИХ РОЗПОДІЛІВ

Номер варіанта	Кількість точок	Координати точок (межі ділянок)					
		1	2	3	4	5	6
1	2	0,099	0,101	—	—	—	—
2	6	0,035	0,075	0,095	0,105	0,125	0,165
3	6	0,035	0,075	0,095	0,105	0,155	0,255

Результати моделювання подані в таблиці 7.3.

Таблиця 7.3

РЕЗУЛЬТАТИ МОДЕЛЮВАННЯ

Номер варіанта	m_{pr}	σ_{pr}	G_{pr}
1	164,6	27,2	129,8
2	165,2	90,8	49,0
3	205,1	150,9	11,9

Аналіз даних табл. 7.3 показує, що зі збільшенням невизначеності та зумовленого цим ступеня ризику щодо частки підприємства на ринку гарантований прибуток зменшується через більший розкид (варіацію) випадкової величини прибутку.

Якщо відсутня додаткова інформація, то кращим є перший варіант. Можливі й інші стратегії прийняття рішення в умовах ризику.

7.2. Приклад імітаційного моделювання роботи відділення банку по обслуговуванню фізичних осіб

Застосування методу імітаційного моделювання можна продемонструвати на прикладі роботи відділення банку по обслуговуванню фізичних осіб. Допустимо, що необхідно визначити мінімальну кількість обслуговуючого персоналу, яка забезпечує необхідну якість сервісу.

Критерій якості сервісу задамо правилом: середній розмір черги клієнтів не повинен перевищувати N чоловік. Очевидно, що для вирішення поставленого завдання необхідно мати достатні знання про систему: які клієнти відвідують банк, яка кількість клієнтів приходить протягом робочого дня, а також скільки часу займає обслуговування одного клієнта.

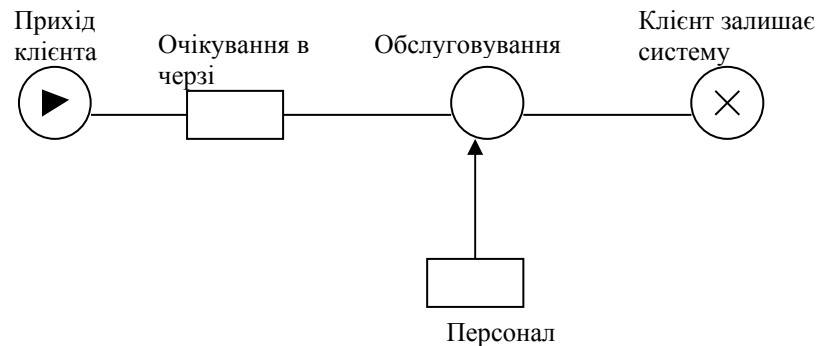
Хоча дане завдання і може показатися спеціалізованим, схожі проблеми виникають в багатьох областях, де задіяні людські і технічні ресурси. Оплата часу роботи кваліфікованого працівника і часу використання складної техніки складає чималу частку витрат компаній.

Визначення оптимального графіка використання ресурсів, що дозволяє системі ефективно виконувати поставлені завдання, дозволяє понизити витрати, а значить збільшити прибутковість.

При розв'язанні такого типу задач зручно використовувати комп'ютерні програми, розроблені спеціально для моделювання, наприклад Object GPSS або ISS 2000 [22].

На першому етапі рішення задачі створюється модель, яка відповідає структурі і бізнес-процесам відділення банку. В ході розробки моделі враховуються тільки ті деталі, які роблять істотний вплив на аспекти роботи системи, що вивчаються. Наприклад, наявність відділення обслуговування юридичних осіб або кредитного відділу не впливає на

обслуговування фізичних осіб, оскільки вони фізично і функціонально відокремлені від останнього. Схематично таку модель можна представити у вигляді послідовності наступних дій.



На другому етапі на вхід моделі подаються початкові дані: інтенсивність приходу клієнтів, середній час обслуговування клієнтів, кількість доступного персоналу. На підставі цих даних модель імітує, або відтворює, роботу банку протягом заданого проміжку часу, наприклад, робочого дня.

Час	Подія
19:54	клієнт №167 прийшов і став у чергу
19:56	клієнт №168 прийшов і став у чергу
19:57	клієнт №164 закінчив обслуговуватися та пішов
19:57	клієнт №167 почав обслуговуватися

Наступний етап полягає в аналізі статистики, зібраною і представленою моделлю. Якщо середній розмір черги клієнтів перевищує вибрана межа в N чоловік, то кількість доступного персоналу слід збільшити і виконати новий експеримент.

В результаті проведення серії експериментів над моделлю користувач може визначити оптимальну кількість персоналу. Процес підбору параметрів може бути здійснений також і за допомогою вбудованого оптимізатора, який в автоматичному режимі перевіряє різні поєднання і знаходить краще рішення.

Завдання для самостійної роботи

7.1. Імовірність появи події A у кожному випробуванні дорівнює $P(A) = n:10$ (де число n означає номер варіанта від 1 до 30). Необхідно змодельовати три випробування і визначити послідовність реалізації події A .

7.2. Нехай при випробуванні мають місце залежні й сумісні події A та B , при цьому відомо, що $P(A) = 0,6$; $P(B) = 0,4$; $P(AB) = 0,2$.

Потрібно змодельовати появу подій A та B у двох випробуваннях.

7.3. Випадкова похибка дохідності цінного папера «А» становить $\pm n \%$ (де число n означає номер варіанта від 1 до 30). Теоретично її можна розглядати як випадкову величину X , що має рівномірний закон розподілу.

Провести імітаційне моделювання значень випадкової величини X (100 прогонів). Визначити її математичне сподівання і середньоквадратичне відхилення.

7.4. Час, упродовж якого інспектор податкової служби перевіряє квартальний звіт (t), є випадковою величиною, розподіленою відповідно до закону Вейбула. Середній час, що витрачається на перевірку, дорівнює $\bar{t} = 20$ хв. Коефіцієнт варіації величини t дорівнює $CV_t = 0,52$. Необхідно змодельовати для заданих умов випадкове число t (кількість прогонів дорівнює 10).

7.5. Періодичність перевірки підприємств податковою інспекцією – випадкова величина (Δt), яка має закон гама-розподілу. Середній інтервал перевірки становить $\overline{\Delta t} = 2,5$ місяця. Коефіцієнт варіації величини Δt дорівнює $CV = 0,38$. Треба змодельовати для заданих умов можливі моменти перевірок підприємства податковою інспекцією (число прогонів узяти рівним 10).

7.6. Використовуючи умови попередньої задачі, визначити кількість перевірок податковою інспекцією за перший рік роботи підприємства.

8. Теоретико-ігрові методи Економіко-математичне моделювання

8.1. Основні поняття теорії ігор.

8.2. Аналітичний та графічний методи розв'язання матричних ігор.

8.3. Методи розв'язання матричних ігор $m \times n$ ($m, n > 2$).

8.4. Статистичні ігри та критерії прийняття рішень.

8.5. Біматричні ігри з ненульовою сумою.

Мета практичної роботи: ознайомитися з поняттями теорії ігор, класифікацією ігор, з теоретико-ігровими моделями та критеріями прийняття рішень, засвоїти методи розв'язання парних антагоністичних ігор, статистичних ігор, біматричних безкоаліційних та кооперативних ігор.

Основний теоретичний матеріал

8.1. Основні поняття теорії ігор

Теорія ігор – це математична теорія конфліктних ситуацій. Класичними прикладами конфліктних ситуацій є покупець-продавець, арбітражні спори, аукціони, вибори тощо. Учасники конфлікту, як правило, переслідують різні цілі, причому результат будь-якого рішення кожного з них залежить від рішень, прийнятих іншими учасниками. Складніші ситуації виникають, коли мають місце об'єднання або коаліції учасників.

Спрощену формалізовану модель конфлікту прийнято називати грою. Зацікавлені сторони називають гравцями. Основна задача гри – визначення *оптимальних стратегій* гравців з метою досягнення ними своїх цілей. Стратегія – це набір правил (або програма), що визначають, яку дію (хід) з наявних необхідно зробити для кожної реалізації гри.

У теорії ігор припускається, що кожний гравець знає свою функцію виграшу та набір стратегій, які є в його розпорядженні, а також функції

виграшів і стратегії інших гравців, і у відповідності з цією інформацією він організує свою поведінку.

Платіжна матриця гри – це прямокутна матриця розмірності $m \times n$, де m – кількість стратегій першого гравця, n – кількість стратегій другого гравця. На перетині i -го рядка j -го стовпчика ставиться платіж в умовних одиницях другого гравця першому, якщо перший гравець застосовує свою i -ту стратегію, а другий – свою j -ту стратегію. Якщо виграє другий гравець, то платіж буде мати знак мінус.

Гра може бути в чистих або змішаних стратегіях. Сукупність стратегій $B_1, B_2, \dots, B_n$, які мають оцінку у вигляді ймовірностей $X_1, X_2, \dots, X_n$ їх здійснення, називається змішаною стратегією. Якщо ж гравцям вигідно застосовувати одну із своїх стратегій протягом всіх реалізацій гри, то така стратегія називається чистою, а гра – грою в чистих стратегіях.

Гра називається антагоністичною, якщо кожен з гравців прагне нанести іншому максимальний збиток, тобто сторони переслідують протилежні інтереси.

Ціна гри – це середній виграш першого гравця, тобто у випадку парної антагоністичної гри – це оптимальний виграш гравця А.

Нижньої ціною гри називається число α , що визначається за формулою $\alpha = \max \min a_{ij}$ (максимальний з мінімальних елементів кожного рядка платіжної матриці). Нижня ціна гри показує який мінімальний виграш може гарантувати собі перший гравець, застосовуючи свої чисті стратегії при всіляких діях другого гравця.

Верхньої ціною гри називається число β , що визначається за формулою: $\beta = \min \max a_{ij}$ (мінімальний з максимальних елементів кожного стовпця платіжної матриці). Верхня ціна гри показує, яким числом другий гравець може обмежити виграш першого гравця застосуванням своїх стратегій.

Якщо в матричній грі нижня і верхня ціни гри збігаються, тобто $\alpha = \beta$, то говорять, що ця гра має сідлові точки і має рішення в чистих стратегіях.

Загальне значення верхньої і нижньої цін гри називається ціною гри $v = \alpha = \beta$. Сідлова точка – це пара чистих стратегій (A_i, B_j) при яких досягається рівність $\alpha = \beta$. Рішенням гри в цьому випадку є сідлова точка – пара оптимальних стратегій гравців і відповідна ціна гри. Якщо матрична гра не має сідлової точки, то рішення знаходять у змішаних стратегіях.

Кінцева гра – гра, в якій кожен гравець має кінцеве число можливих стратегій.

Гра з нульовою сумою – гра, в якій сума вигравів всіх гравців в кожній її партії дорівнює нулю. Гра двох гравців з нульовою сумою є антагоністичною.

Матрична гра – це кінцева гра двох гравців з нульовою сумою, в якій задаються виграти першого гравця у вигляді матриці (рядок матриці відповідає номеру застосовуваної стратегії першого гравця, стовпець – номеру застосовуваної стратегії другого гравця; на перетині рядка і стовпця матриці знаходиться виграти першого гравця, відповідний застосовуваним стратегіям). Виграти другого гравця дорівнює програшу першого.

На відміну від ігор з нульовою сумою, існують ігри з ненульовою сумою, в яких необов'язково, щоб один із гравців виграв, а другий програв; вони можуть і вигравати і програвати одночасно. Оскільки інтереси гравців у таких іграх не повністю протилежні, їх поведінка стає різноманітнішою. Так, наприклад, якщо в грі з нульовою сумою кожному гравцеві не вигідно було повідомляти другому свою стратегію (це могло зменшити його виграти), то в грі з ненульовою сумою стає бажаним координувати свої дії з партнером, або якимсь чином впливати на його дії.

Ігри з ненульовою сумою називають також біматричними, оскільки вони визначаються або двома матрицями, які вказують платежі (виграти) кожної сторони або однією блочною матрицею, елементами якої є пари чи блоки.

Існує два різновиди біматричних ігор – безкоаліційні (некооперативні), які забороняють будь-яке співробітництво сторін, і кооперативні, які допускають таке співробітництво. Очевидно, що кооперативні ігри – це складніший об’єкт дослідження (хоча б тому, що форми кооперації можуть бути найрізноманітніші).

Теорію ігор уперше було систематично викладено Дж. фон Нейманом і О.Моргенштерном в 1944 р. у монографії «Теория игр и экономическое поведение», хоча окремі результати було опубліковано ще в 20-х роках. З цього часу починає проявлятися значний інтерес до теорії ігор, спочатку у війсьній галузі, а потім і в інших напрямках практичної діяльності.

8.2. Аналітичний та графічний методи розв’язання матричних ігор

Якщо матрична гра не має сідлової точки, то рішення знаходять у змішаних стратегіях [4].

Змішаною стратегією гравця називається вектор X ($p_1, p_2, \dots, p_m$), координатами якого є ймовірності (відносні частоти) використання гравцем своїх чистих стратегій. Так як події, що полягають у виборі гравцем своїх чистих стратегій утворюють повну групу, то сума їх ймовірностей дорівнює 1, тобто

$$p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1.$$

Розглянемо матричну гру 2×2 , яка задана платіжною матрицею

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Якщо ця гра не має сідлової точки, то її рішення становить пара оптимальних стратегій $X^*(p_1, p_2)$ і $Y^*(q_1, q_2)$. Причому використання гравцем А своєї оптимальної стратегії гарантує йому отримання середнього виграшу не меншого, ніж ціна гри v . При цьому, якщо гравець В використовує свою оптимальну стратегію, то середній виграш гравця А буде дорівнювати v ; якщо ж гравець В не використовує свою оптимальну стратегію, то середній виграш гравця А буде більше v .

Записане вище положення має імовірнісний зміст, тобто середній виграш буде тим ближче до v , чим більше партій зіграють гравці: середній виграш прагне до v за ймовірністю (іншими словами, середній виграш не точно дорівнює v , а приблизно дорівнює і чим більше партій, тим менше відхилення). Крім того, визначення змішаної стратегії вимагає вибирати чисті стратегії гравцями випадково у відповідності до імовірності їх використання (умова секретності вибору чистої стратегії).

Для вирішення матричних ігор 2×2 можна використовувати аналітичний і геометричний методи.

Аналітичний метод розв'язання гри 2×2 .

Щоб знайти оптимальну змішану стратегію гравця А $X^*(p_1, p_2)$ і відповідну ціну гри v , необхідно розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = v, \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = v, \\ p_1 + p_2 = 1. \end{cases} \quad (8.1)$$

Перше рівняння визначає математичне сподівання виграшу гравця А при використанні ним стратегії $X^*(p_1, p_2)$ проти стратегії В1; друге рівняння визначає математичне сподівання виграшу гравця А при використанні ним стратегії $X^*(p_1, p_2)$ проти стратегії В2; третє рівняння – властивість компонентів змішаної стратегії гравця.

Аналогічно для гравця В. Щоб знайти оптимальну змішану стратегію гравця В $Y^*(q_1, q_2)$ і відповідну ціну гри v , необхідно розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = v, \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 = v, \\ q_1 + q_2 = 1. \end{cases} \quad (8.2)$$

Ціна гри v загальна для обох гравців, тому при вирішенні систем рівнянь (8.1) і (8.2) повинно вийти однакове значення v .

Геометричний метод розв'язання гри 2×2 . В точках $x = 0$, $x = 1$ осі Ox встановимо перпендикуляри і позначимо їх A_1 і A_2 – відповідно до стратегій гравця А (рис. 8.1).

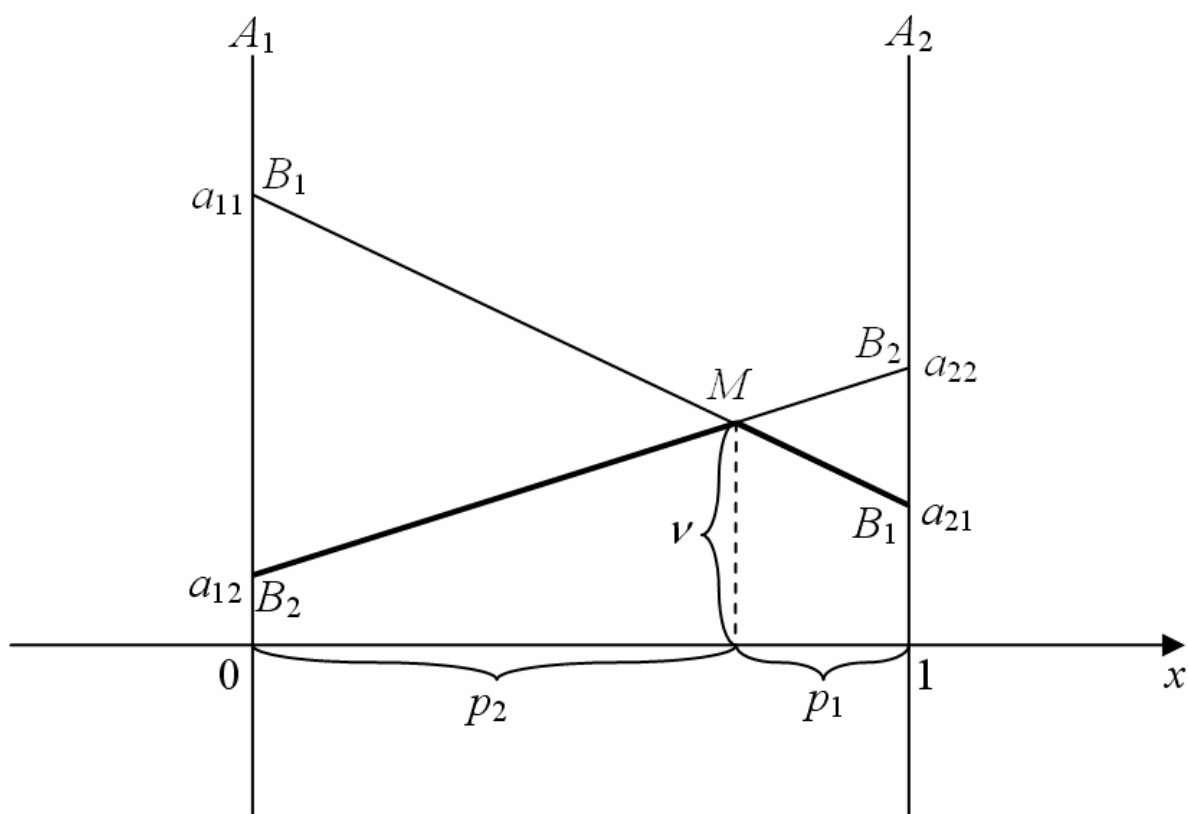


Рис. 8.1. Графічна інтерпретація матричної гри 2×2 для гравця А.

Зобразимо стратегію B_1 . На прямій A_1 відкладемо a_{11} , а на прямій A_2 відкладемо a_{21} .

З'єднаємо ці точки і отримаємо пряму B_1B_2 (див. рис.8.1). Аналогічно зобразимо стратегію B_2 , відклавши на прямій A_1 значення a_{12} , а на прямій A_2 значення a_{22} .

Кожній точці на відрізку $[0; 1]$ відповідає змішана стратегія гравця А, причому p_2 – відстань від цієї точки до нуля, а p_1 – відстань від цієї точки до точки 1 (див. рис. 8.1).

Ламана B_2MB_1 визначає мінімальні можливі середні виграші гравця А при використанні ним своїх змішаних стратегій. Точка М (найвища точка ламаної) визначає найкращий середній виграш гравця А з усіх мінімальних. Вона відповідає оптимальній змішаній стратегії гравця А. При цьому, якщо М (x, y) , то $p_1 = 1 - x$, $p_2 = x$, $v = y$.

Таким чином, завдання зводиться до знаходження координат точки М, яка є точкою перетину прямих B_1B_2 і B_2B_1 . Для знаходження рівнянь

прямих B_1B_1 і B_2B_2 можна скористатися рівнянням прямої, що проходить через дві задані точки

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

з урахуванням того, що пряму B_1B_1 визначають точки $B_1 (0; a_{11})$, $B_1 (1; a_{21})$, а пряму B_2B_2 визначають точки $B_2 (0; a_{12})$, $B_2 (1; a_{22})$.

Для гравця В оптимальна змішана стратегія знаходиться аналогічно, але точка М визначається не найвищою точкою нижньої ламаної, а найнижчою точкою вищої ламаної (жирна ламана на рис. 8.2.)

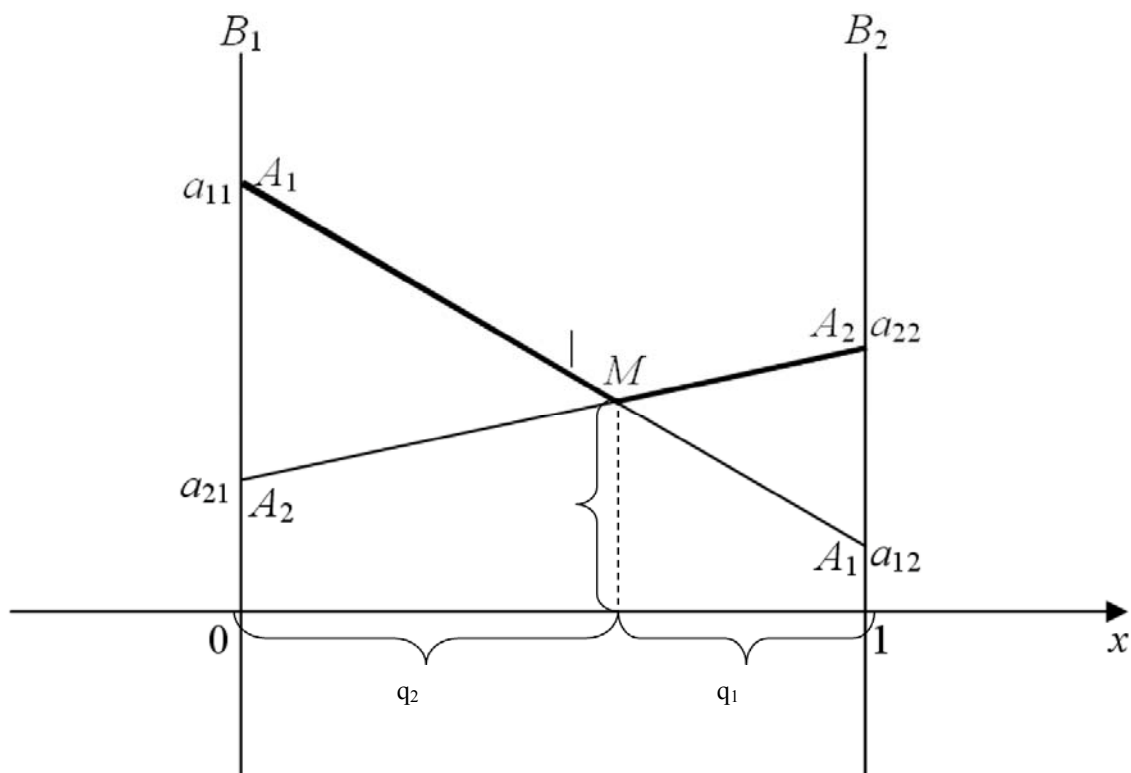


Рис. 8.2. Графічна інтерпретація матричної гри 2×2 для гравця В

Знайшовши координати точки М (x, y) , як точки перетину прямих A_1A_1 і A_2A_2 , компоненти $Y^*(q_1, q_2)$ оптимальної змішаної стратегії гравця В і ціну гри v можна знайти за наступними формулами

$$q_1 = 1 - x, q_2 = x, v = y.$$

8.3. Методи розв'язання матричних ігор $m \times n$ ($m, n > 2$).

Нехай у грі беруть участь дві сторони А і В. Умови гри задаються матрицею виграшів (платіжною матрицею – табл. 8.1):

Таблиця 8.1

А		В				
		B_1	...	B_j	...	B_n
		X_1	...	X_j	...	X_n
A_1	Y_1	a_{11}	...	a_{1j}	...	a_{1n}
...	...	...	...	...	...	...
A_i	Y_i	a_{i1}	...	a_{ij}	...	a_{in}
...	...	...	...	...	...	...
A_m	Y_m	a_{m1}	...	a_{mj}	...	a_{mn}

Стратегію, яку обирає сторона А, будемо позначати $A_1, A_2, \dots, A_m$; аналогічно стратегію сторони В – символами $B_1, B_2, \dots, B_n$; y_i – ймовірність використання стратегії i першою стороною; x_j – ймовірність використання стратегії j другою стороною В. Змішаною стратегією першого (другого) гравця називається вектор

$$\bar{y} = (y_1, \dots, y_m); (\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)),$$

для якого

$$\sum_{i=1}^m y_i = 1; \sum_{j=1}^n x_j = 1; y_i \geq 0 \ (i = \overline{1..m}); x_j \geq 0 \ (j = \overline{1..n}).$$

Елементи платіжної матриці виграшів можуть бути додатними, від'ємними або рівними нулю. Якщо елемент матриці додатний, то сторона В у визначеній ситуації сплачує стороні А суму, яка дорівнює елементу матриці. Якщо елемент матриці від'ємний, то сторона А сплачує стороні В суму, яка дорівнює абсолютному значенню елемента. Якщо елемент дорівнює нулю, ніяка оплата не здійснюється.

Будемо розглядати парні ігри з нульовою сумою. Це такі ігри, сума платежів яких дорівнює нулю, тобто програш одного гравця дорівнює виграшу другого. У цьому випадку середня величина виграшу (програшу) – математичне сподівання, є функцією від змішаних стратегій $\bar{x}, \bar{y}$:

$$S(\bar{y}, \bar{x}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} y_i x_j.$$

Функцію $S(\bar{y}, \bar{x})$ називають платіжною функцією гри з матрицею $[a_{ij}]_{m \times n}$.

Стратегії $\bar{y}^* = (y_1^*, \dots, y_m^*)$, $\bar{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ називаються оптимальними, якщо для довільних стратегій $\bar{y} = (y_1, \dots, y_m)$, $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ виконуються умови

$$S(\bar{y}, \bar{x}^*) \leq S(\bar{y}^*, \bar{x}^*) \leq S(\bar{y}^*, \bar{x}). \quad (8.3)$$

Використання в грі оптимальних змішаних стратегій $\bar{y}^*, \bar{x}^*$ забезпечує першому гравцю виграш не менший, ніж при використанні ним будь-якої іншої стратегії $\bar{y}$; другому гравцеві – програш не більший, ніж при використанні ним будь-якої іншої стратегії $\bar{x}$.

Значення платіжної функції при оптимальних стратегіях визначає ціну гри C , тобто

$$C = S(\bar{y}^*, \bar{x}^*).$$

Сукупність оптимальних стратегій і ціни гри становить рішення гри.

Доведено, що для того, щоб число C було ціною гри, а $\bar{y}^*$ і $\bar{x}^*$ – оптимальними стратегіями, необхідно і достатньо, щоб виконувались нерівності

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* &\geq C \quad (j = \overline{1, n}) \\ \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i^* &\leq C \quad (i = \overline{1, m}) \end{aligned} \quad (8.4)$$

У подальшому, для визначеності, припускаємо, що $C > 0$. Це завжди може бути досягнуто завдяки тому, що додавання до всіх елементів матриці виграшів одного і того ж постійного числа d не приводить до зміни оптимальних стратегій, а тільки збільшує ціну гри на d .

Таким чином, щоб знайти рішення гри, яка задається цією платіжною матрицею (табл. 8.1), слід скласти двоїсті (спряжені) задачі лінійного програмування і знайти їх розв'язок.

Пряма задача: знайти максимальне значення функції F , яка задається виразом (8.7) за умов (8.8).

Двоїста (спряжена) задача: знайти мінімальне значення функції f , яка задається виразом (8.6) за умов (8.5).

Використовуючи розв'язок пари двоїстих задач

$$\begin{aligned} \bar{y}^{/*} &= (y_1^{/*}, \dots, y_m^{/*}), \\ \bar{x}^{/*} &= (x_1^{/*}, \dots, x_n^{/*}), \end{aligned}$$

отримуємо формули для визначення стратегій та ціни гри:

$$y_i^* = \frac{y_i^{/*}}{\sum_{i=1}^m y_i^{/*}} = C y_i^{/*} \quad x_i^* = \frac{x_i^{/*}}{\sum_{j=1}^n x_j^{/*}} = C x_i^{/*}, \quad (8.9)$$

$$C = \frac{1}{\sum_{i=1}^m y_i^{/*}} = \frac{1}{\sum_{j=1}^n x_j^{/*}}. \quad (8.10)$$

Отже, процес знаходження рішення гри з використанням методів лінійного програмування включає такі етапи:

1. Складання пари двоїстих (спряжених) задач лінійного програмування, які еквівалентні заданій матричній грі.
2. Визначення оптимальних планів двоїстих задач, тобто розв'язання задачі лінійного програмування.
3. Знаходження рішення гри, використовуючи співвідношення між планами двоїстих задач, оптимальними стратегіями і ціною гри.

Згідно з цими етапами розв'яжемо наступний приклад.

Приклад 8.1. Платіжна матриця гри має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} -100 & -400 \\ -150 & -300 \\ -190 & -250 \\ -330 & -200 \end{pmatrix}.$$

Задача фірми А – знайти оптимальну стратегію, яка забезпечує мінімум очікуваних збитків в умовах невизначеності поведінки постачальника (фірма В).

Для того, щоб ціна гри С була більшою від нуля, додаємо до всіх елементів цієї матриці число $d=400$. Це, як згадувалось вище, не приведе до зміни оптимальних стратегій, а тільки збільшить ціну гри на $d=400$. Після цього додавання матриця платежів матиме вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 300 & 0 \\ 250 & 100 \\ 210 & 150 \\ 70 & 200 \end{pmatrix}.$$

Відповідно до першого етапу складемо пару двоїстих (спряжених) задач лінійного програмування, які еквівалентні даній матричній грі.

Пряма задача (співвідношення (8.7), (8.8)): знайти максимальне значення функції

$$F = \sum_{j=1}^2 x'_j = x'_1 + x'_2, \quad (n = 2; m = 4) \quad (8.11)$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} 300x'_1 \leq 1, \\ 250x'_1 + 100x'_2 \leq 1, \\ 210x'_1 + 150x'_2 \leq 1, \\ 70x'_1 + 200x'_2 \leq 1, \\ x'_1, x'_2 \geq 0. \end{cases} \quad (8.12)$$

Двоїста (спряжена) задача (співвідношення (8.5) і (8.6)): знайти мінімальне значення функції

$$f = \sum_{i=1}^4 y'_i = y'_1 + y'_2 + y'_3 + y'_4 \quad (8.13)$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} 300y'_1 + 250y'_2 + 210y'_3 + 70y'_4 \geq 1, \\ 100y'_2 + 150y'_3 + 200y'_4 \geq 1, \\ y'_1, y'_2, y'_3, y'_4 \geq 0. \end{cases} \quad (8.14)$$

Розв'язавши задачу лінійного програмування (8.11) – (8.14) симплекс-методом, отримаємо

$$x_1^{/*}=5/3150; x_2^{/*}=14/3150; F_{\max}=19/3150;$$

$$y_1^{/*}=0; y_2^{/*}=0; y_3^{/*}=13/3150; y_4^{/*}=6/3150; f_{\min}=19/3150.$$

Підставивши ці розв'язки у співвідношення (8.9) і (8.10), отримаємо оптимальні стратегії фірми А:

$$y_1^* = \frac{y_1^{/*}}{\sum_{i=1}^4 y_i^{/*}} = \frac{0}{\frac{19}{3150}} = 0; \quad y_2^* = \frac{y_2^{/*}}{\sum_{i=1}^4 y_i^{/*}} = \frac{0}{\frac{19}{3150}} = 0;$$

$$y_3^* = \frac{y_3^{/*}}{\sum_{i=1}^4 y_i^{/*}} = \frac{\frac{13}{3150}}{\frac{19}{3150}} = 0,685; \quad y_4^* = \frac{y_4^{/*}}{\sum_{i=1}^4 y_i^{/*}} = \frac{\frac{6}{3150}}{\frac{19}{3150}} = 0,315,$$

оптимальні стратегії фірми-постачальника В:

$$x_1^* = \frac{x_1^{/*}}{\sum_{j=1}^2 x_j^{/*}} = \frac{\frac{5}{3150}}{\frac{19}{3150}} = 0,263; \quad x_2^* = \frac{x_2^{/*}}{\sum_{j=1}^2 x_j^{/*}} = \frac{\frac{14}{3150}}{\frac{19}{3150}} = 0,737$$

і ціну гри

$$C = \frac{1}{\sum_{i=1}^4 y_i^{/*}} = \frac{1}{\sum_{j=1}^2 x_j^{/*}} = \frac{1}{\frac{19}{3150}} \approx 165,8.$$

Оскільки додавання до всіх елементів матриці платежів числа $d=400$ збільшило ціну гри на 400, дійсна ціна гри початкової задачі (очікувані збитки фірми А) буде $165,8-400=-234,2$ у.о.

На відміну від графічного методу, який можна застосувати, коли або $n \leq 2$ або $m \leq 2$, метод лінійного програмування можна застосувати для довільних скінченних значень m і n .

8.3.2. Ітераційний (наближений) метод розв'язання задач теорії ігор

Вище було розглянуто два підходи до розв'язання задач теорії ігор: графічний і зведення до задач лінійного програмування. В обох випадках знаходиться точний розв'язок задач теорії ігор – ціна та оптимальні змішані стратегії гравців А і В.

Розглянемо тепер наближений метод розв'язування задач теорії ігор, який відображає деякою мірою реальну ситуацію поступового накопичення гравцями досвіду прийняття раціональних стратегій у результаті багатьох повторів конфліктних ситуацій (гри). Цей метод дає змогу змодельовати процес навчання (поведінку) гравців у ході повторів гри, коли кожний з них оцінює поведінку противника та відповідає на неї найвигіднішим для себе чином. Щоразу на початку гри вони обирають найвигідніші для себе стратегії, базуючись на попередніх виборах супротивника.

Приклад 8.2. Розв'яжемо ітераційним методом попередній приклад 8.1 з фірмами А і В, для якого платіжна матриця має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} -100 & -400 \\ -150 & -300 \\ -190 & -250 \\ -330 & -200 \end{pmatrix}$$

у випадку, коли гра є антагоністичною.

Нехай у перший день після укладання договору фірми А і В приймають довільні стратегії, наприклад: фірма А – стратегію A_3 – $(-190, -250)$, а фірма В – стратегію B_2 – $(-400, -300, -250, -200)$.

Побудуємо модель, яка описує правила вибору наступних «ходів» фірмами А і В.

На другий день фірма А вибирає свою стратегію так, щоб її виграш при стратегії В₂ фірми В був максимальний, тобто збитки, враховуючи знаки платіжної матриці, були мінімальними (–200). Очевидно, що це буде стратегія А₄ – (–330, –200).

Фірма В, враховуючи попередній день, вибирає знову стратегію В₂, щоб нанести фірмі А найбільші збитки (–250) при її стратегії А₃.

На третій день фірма А вибирає свою стратегію так, щоб її накопичені (загальні) збитки за попередні два дні при стратегіях В₂ фірми В,

$$(S_{A_1}, S_{A_2}, S_{A_3}, S_{A_4}) = (-400, -300, -250, -200) + (-400, -300, -250, -200) = (-800, -600, -500, -400)$$

були мінімальними (вони виділені). Очевидно, це буде стратегія А₄. Фірма В вибирає в цей же день свою стратегію, базуючись на інформації про стратегії фірми А за попередні два дні, таким чином, щоб загальні збитки фірми А при її стратегіях А₃ і А₄,

$$(S_{B_1}, S_{B_2}) = (-190, -250) + (-330, -200) = (-520, -450),$$

були максимальними (вони виділені). Це стратегія В₁.

На четвертий день ситуація повторюється. Фірма А, базуючись на попередніх діях фірми В, за три дні вибирає свою стратегію так, щоб її загальні збитки за ці дні при стратегіях В₂, В₂, В₁ фірми В,

$$(S_{A_1}, S_{A_2}, S_{A_3}, S_{A_4}) = (-800, -600, -500, -400) + (-100, -150, -190, -330) = (-900, -750, -690, -730),$$

були мінімальними. Це стратегія А₃.

Фірма В, мета якої максималізувати збитки фірми А при її стратегіях А₃, А₄, А₄,

$$(S_{B_2}, S_{B_1}) = (-520, -450) + (-330, -200) = (-850, -650),$$

вибирає стратегію В₁.

У наступні дні ситуація повторюється, поведінка вибору стратегій фірмами А і В не змінюється, її результати наведені в табл. 8.2:

Таблиця 8.2

n	I	S'_{B_1}	S'_{B_2}	S'_n	j	S'_{A_1}	S'_{A_2}	S'_{A_3}	S'_{A_4}	S''_n	$\bar{S}_n$	r_n	R_n	$\bar{r}_n$
1	3	-190	-250	-250	2	-400	-300	-250	-200	-200	-225	-250	-250	-250
2	4	-520	-450	-260	2	-800	-600	-500	-400	-200	-230	-200	-450	-225
3	4	-850	-650	-283	1	-900	-750	-690	-730	-230	-257	-330	-780	-260
4	3	-1040	-900	-260	1	-1000	-900	-880	-1060	-220	-240	-190	-970	-243
5	3	-1290	-1150	-246	1	-1100	-1050	-1070	-1390	-210	-228	-190	-1160	-232
6	2	-1380	-1450	-241	1	-1200	-1200	-1260	-1720	-200	-221	-150	-1310	-218
7	1	-1480	-1850	-264	2	-1600	-1500	-1510	-1920	-214	-239	-400	-1710	-244
8	2	-1630	-2150	-269	2	-2000	-1800	-1760	-2120	-220	-244	-300	-2010	-251
9	3	-1820	-2400	-267	2	-2400	-2100	-2010	-2320	-223	-245	-250	-2260	-251
10	3	-2010	-2650	-265	2	-2800	-2400	-2260	-2520	-226	-246	-250	-2510	-251
11	3	-2200	-2900	-264	2	-3200	-2700	-2510	-2720	-228	-246	-250	-2760	-251
12	3	-2390	-3150	-263	2	-3600	-3000	-2760	-2920	-230	-246	-250	-3010	-251
13	3	-2580	-3400	-262	2	-4000	-3300	-3010	-3120	-232	-247	-250	-3260	-251
14	3	-2770	-2650	-261	2	-4400	-3600	-3260	-3320	-233	-247	-250	-3510	-251
15	3	-2960	-3900	-260	2	-4800	-3900	-3510	-3520	-234	-247	-250	-3760	-251
16	3	-3150	-4050	-253	2	-5200	-4200	-3760	-3720	-232	-242	-250	-4010	-251
17	4	-3480	-4250	-250	2	-5600	-4500	-4010	-3920	-231	-240	-200	-4210	-248
18	4	-3810	-4450	-247	2	-6000	-4800	-4260	-4120	-229	-238	-200	-4410	-245
19	4	-4140	-4650	-245	2	-6400	-5100	-4510	-4320	-227	-236	-200	-4610	-243
..	..	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

де n – кількість днів, яка пройшла після укладання договору, або пара послідовних стратегій (“ходів”) фірм А і В;

i – номер стратегії, вибраний фірмою А;

S'_{B_1}, S'_{B_2} – накопичені (загальні) збитки фірми А за перші n днів відповідно при стратегіях B_1, B_2 фірми В;

S'_n – максимальні середні збитки фірми А, які дорівнюють максимальним накопиченим збиткам за перші n днів, поділеним на кількість цих днів;

j – номер стратегії, вибраний фірмою В;

$S'_{A_1}, S'_{A_2}, S'_{A_3}, S'_{A_4}$ – накопичені (загальні) збитки фірми А за перші n днів відповідно при її стратегіях A_1, A_2, A_3, A_4 ;

S''_n – мінімальні середні збитки фірми А, які дорівнюють мінімальним накопиченим збиткам за перші n днів, поділеним на кількість цих днів;

$\bar{S}_n$ – середнє (арифметичне) значення максимальних (S'_n) та мінімальних (S''_n) середніх збитків фірми А;

r_n – реальні збитки фірми А за кожний день;

R_n – реальні накопичені збитки фірми А за n днів;

$\bar{r}_n$ – реальні середні збитки фірми А за один день, які дорівнюють накопиченим реальним збиткам за перші n днів, поділеним на кількість цих днів.

З табл. 8.2 видно, що при збільшенні n всі три величини S'_n , S''_n і $\bar{S}_n$ наближаються до точного значення збитків (ціни гри) фірми А, які дорівнюють – 234,2 у.о. і були знайдені раніше методом лінійного програмування (див.приклад 8.1), але середнє арифметичне S_n збігається порівняно швидше, оскільки $S'_n < -234,2 < S''_n$.

Змішані стратегії фірм А і В також при збільшенні n збігаються зі своїми точними значеннями (див. приклад 8.1), відповідно $\bar{y}^* = (0; 0; 0,685; 0,315)$, $\bar{x}^* = (0,263; 0,737)$, але повільніше.

Наприклад, після $n = 19$ повторів (днів) наближені значення збитків фірми А (ціна гри) $S_{19} = -236$ у.о., а наближені значення змішаних стратегій фірм А і В визначаються частотами появи їх відповідних чистих стратегій:

$$y_{19} = \left(\frac{1}{19}, \frac{2}{19}, \frac{11}{19}, \frac{5}{19} \right) \approx (0,053; 0,105; 0,579; 0,263);$$

$$x_{19} = \left(\frac{4}{19}, \frac{15}{19} \right) \approx (0,211; 0,789).$$

Для порівняння в останніх трьох колонках табл. 8.2 наведено реальну інформацію про хід гри (кожну реалізацію гри), з якої видно, що розглянута модель (алгоритм) адекватно відображає поведінку гравців (фірм А і В) у ході повторів гри і дає змогу їм визначити свої оптимальні стратегії та ціну гри (збитки фірми А).

Із вищевказаного видно, що ітераційний метод є практичним в користуванні та водночас універсальним. За його допомогою можна легко знайти наближений розв'язок будь-якої матричної гри. При цьому обсяг та складність обчислень порівняно повільно зростають в міру збільшення розмірів матричної гри.

8.3.3. Прямий розв'язок матричних ігор із застосуванням принципу домінування

Загалом будь-яка матрична гра може бути розв'язана за нерівностями (8.4). Але це потребує великого обсягу обчислень, яке збільшується із збільшенням числа гравців. Тому, якщо це можливо, зменшують число чистих стратегій гравців, використовуючи «принцип домінування», який полягає у наступному.

Якщо елементи деякого рядка платіжної матриці менші, ніж відповідні елементи деякого іншого рядка цієї матриці, то останній рядок домінує перший. Перший рядок виличають з матриці. Випадок із стовпчиками аналогічний, тільки виличається стовпчик із більшими елементами.

Далі треба перевірити виконання нерівностей (8.4). Якщо нерівність (8.4) виконується, то гравці мають чисті оптимальні стратегії (гравець I – чисту максимінну стратегію, а гравець II – чисту мінімаксну). А якщо ні, то хоча б в одного гравця оптимальні стратегії будуть змішаними.

Розглянемо принцип домінування на прикладі задачі планування випуску побічної продукції (антагоністичний випадок) [4, 19].

Приклад 8.3. Нехай у деякому місті є два підприємства, які крім своїх основних виробів можуть випускати для населення деяку побічну продукцію одного й того ж призначення, але вона може відрізнятися за оформленням, за зручністю користування і т.д. Припустимо, підприємство А випускає побічну продукцію типу A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 , а підприємство В – побічну продукцію типу B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 . Собівартість та продажна ціна всіх видів продукції однакова. Соціологи – спеціалісти по прогнозуванню попиту – встановили, що буде реалізовано $N = 1000$ одиниць продукції; причому, якщо перше підприємство А (гравець I) буде випускати продукцію типу A_i , а друге підприємство В (гравець II) – продукцію типу B_j , то в місті знайде збут $p_{ij}N$ товарів типу A_i та

$(1 - p_{ij})N$ товарів типу B_j , $0 \leq p_{ij} \leq 1$. Потужність підприємств така, що кожне з них може забезпечити місто. Приймаючи прибуток від продажу одиниці товару рівним одиниці, а корисність гравця I – рівною його прибутку, матрицю виграшу H гравця I можна записати таким чином:

$$H = (p_{ij}N)_{i=1, \dots, m; j=1, \dots, m}.$$

Аналогічно записується матриця виграшів гравця II, елемент (i, j) якої дорівнює $(1 - p_{ij})N$. Оскільки в будь-якій ситуації сума прибутків гравців I і II дорівнює одному й тому ж числу $N = p_{ij}N + (1 - p_{ij})N$, збільшення виграшу гравця I еквівалентно зменшенню виграшу гравця II, тобто інтереси гравців протилежні. Тому гравець II, мінімізуючи збут $p_{ij}N$ товарів A_i гравця I, максимізує збут $(1 - p_{ij})N$ своїх товарів B_j . Отже, гра, що задана матрицею H , моделює антагоністичну гру.

Розв'язок гри визначає оптимальні стратегії $\bar{x}^*$, $\bar{y}^*$ відповідно гравців I та II, а також математичне сподівання виграшу гравця I, рівне $S(\bar{x}, \bar{y})$. Оскільки сума проданих товарів дорівнює N , математичне сподівання реалізованих товарів підприємства В дорівнює $N - S(\bar{y}, \bar{x})$.

Розглянемо розв'язок гри на конкретному числовому прикладі. Нехай прогнозована частка збуту продукції підприємства А задана табл. 8.3:

Таблиця 8.3

Підприємство А	Підприємство В				
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	0,5	0,5	0,4	0,5	0,2
A_2	0,5	0,4	0,7	0,1	0,6
A_3	0,2	0,3	0,4	0,1	0,7
A_4	0,3	0,6	0,7	0,3	0,2
A_5	0,4	0,4	0,3	0,0	0,2

Треба визначити типи продукції, які випускаються кожним підприємством. У цьому випадку матриця виграшів гравця I буде мати вигляд

$$H = \begin{pmatrix} 500 & 500 & 400 & 500 & 200 \\ 500 & 400 & 700 & 100 & 600 \\ 200 & 300 & 400 & 100 & 700 \\ 300 & 600 & 700 & 300 & 200 \\ 400 & 400 & 300 & 0 & 200 \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що досить розв'язувати гру з платіжною матрицею виграшів $H^1 = \frac{1}{100} H$, тобто

$$H^1 = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 4 & 5 & 2 \\ 5 & 4 & 7 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 7 \\ 3 & 6 & 7 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Гра з матрицею виграшів H^1 називається підгрою гри з матрицею H . Множина чистих стратегій кожного з гравців у підгрі міститься у множині його чистих стратегій у самій грі, звідки випливає, що множина змішаних стратегій кожного з гравців у підгрі міститься у множині змішаних стратегій гри.

Застосуємо принцип домінування. Легко встановити, що елементи п'ятого рядка матриці H^1 не більші за відповідні елементи першого рядка, і тому перша стратегія гравця I домінує п'яту. Крім того, елементи першого і другого стовпчиків не менші за відповідні елементи четвертого стовпчика. Отже, четверта стратегія гравця II домінує його першу та другу стратегії. Згідно з принципом домінування вилучаємо п'ятий рядок і перший та другий стовпчики. Одержимо підгру гри з матрицею виграшів H^1 , яка в матричній формі задається матрицею

$$H^2 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 7 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 7 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що i -му рядку матриці H^2 відповідає i -та стратегія, а j -му стовпчику – $(j+2)$ -га стратегія гри H^1 . Аналіз матриці H^2 показує, що третя стратегія гравця II домінується змішаною стратегією, яка з ймовірностями $3/5$ і $2/5$ використовує відповідно четверту та п'яту стратегії. Згідно з принципом домінування вилучаємо перший рядок матриці H^2 і одержуємо підгру з матрицею

$$H^3 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 6 \\ 1 & 7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$$

будь-який розв'язок якої є розв'язком гри H^2 , а значить, гри H^1 і H .

Із аналізу матриці H^3 легко встановити, що елементи другого рядка не більші за відповідні елементи третього рядка, а елементи четвертого рядка – за відповідні елементи першого рядка. Тому перша та третя стратегії гравця I домінують відповідно четверту та другу його стратегії. Знову, застосовуючи принцип домінування, одержуємо підгру з матрицею

$$H^4 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Перевіримо, чи має гра розв'язок у чистих стратегіях, причому оптимальними стратегіями гравців I та II відповідно будуть чиста максимінна та чиста мінімаксна стратегії. Якщо ж гра з матрицею виграшів H^4 не має розв'язку в чистих стратегіях, то обидва гравці мають лише такі оптимальні стратегії, які використовують всі свої чисті стратегії з додатними ймовірностями.

Матриця H^4 не має *сідлової точки*, оскільки не виконується рівність $\max_i \min_j h_{ij} = \min_j \max_i h_{ij}$, де h_{ij} – елементи матриці H^4 , тобто оптимальні стратегії гравців змішані.

Нехай $\bar{x}$ – довільна змішана стратегія гравця I. Якщо x_1 – ймовірність вибору гравцем I своєї першої стратегії, то ймовірність вибору ним другої стратегії є $1 - x_1$. Аналогічно, якщо $\bar{y}$ – довільна змішана стратегія гравця II, то вона має вигляд $(y_1, 1 - y_1)$. Оптимальні стратегії I та II гравців $\bar{x}^* = (x_1^*, 1 - x_1^*)$, $\bar{y}^* = (y_1^*, 1 - y_1^*)$ обчислюються за формулами

$$x_1^* = \frac{h_{22} - h_{21}}{h_{11} - h_{12} - h_{21} + h_{22}}, \quad y_1^* = \frac{h_{22} - h_{12}}{h_{11} - h_{12} - h_{21} + h_{22}},$$

а платіжна функція гри дорівнює

$$S(\bar{x}^*, \bar{y}^*) = \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}}{h_{11} - h_{12} - h_{21} + h_{22}}.$$

У результаті обчислень одержимо

$$x_1^* = 2/3, \quad y_1^* = 5/9, \quad S(\bar{x}^*, \bar{y}^*) = 11/3.$$

Стратегіям $\bar{x}^* = (2/3, 1/3)$ і $\bar{y}^* = (5/9, 4/9)$ відповідають стратегії $\bar{x}^* = (2/3, 0, 1/3, 0, 0)$ і $\bar{y}^* = (0, 0, 0, 5/9, 4/9)$ початкової гри. Значення гри з матрицею виграшів H дорівнює $1100/3$.

Одержаний результат означає, що підприємство А вибирає випуск продукції A_1 і A_3 з ймовірностями, рівними відповідно $2/3$ і $1/3$, а підприємство В – випуск продукції B_4 і B_5 з ймовірностями відповідно $5/9$ і $4/9$. При цьому математичне сподівання числа реалізованого товару підприємств А і В відповідно буде дорівнювати $1100/3$ і $1900/3$.

8.4. Статистичні ігри та критерії прийняття рішень

Управління виробничими процесами здійснюється шляхом реалізації послідовності рішень. За відсутності досить повної інформації про стан об'єкта управління виникає невизначеність у прийнятті рішень. Причини

цього можуть бути різними: неможливість отримання інформації до моменту прийняття рішення; дуже високі затрати на отримання інформації; неможливість усунення невизначеності через об'єктивний характер. Наприклад, випадковий характер попиту на продукцію не уможливорює точне прогнозування обсягу її випуску.

З метою зменшення несприятливих наслідків у кожному конкретному випадку необхідно враховувати ступінь ризику та існуючу інформацію. У цьому випадку людина, що приймає рішення, вступає в ігрові відносини з деякою абстрактною особою, яку умовно може назвати «природою». Іншими словами, людина, яка приймає рішення, повинна вміти знаходити управлінське рішення, коли природа не вибирає свідомо своїх оптимальних стратегій. Будь-яку господарську діяльність можна розглядати як гру з природою, про стан якої іноді є деякі ймовірності характеристики.

Байдужість природи до гри (виграшу) і можливість отримання особою, що приймає рішення, додаткової інформації про її стан, відрізняють гру з природою від звичайної матричної гри, в якій беруть участь два свідомих гравці.

Статистичні ігри є основною моделлю теорії прийняття рішень в умовах часткової невизначеності.

Особливістю розв'язку ігор з природою в умовах визначеності є те, що змішана стратегія природи задана, тобто відомі всі ймовірності станів:

$$x_j, j=1,2,\dots,n; \sum_{j=1}^n x_j = 1.$$

Це дає змогу для кожної j -ї чистої стратегії активного гравця обчислити математичне сподівання його виграшу проти відомої змішаної стратегії природи за формулою

$$S_i(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j; \quad i=1,2,\dots,m,$$

де a_{ij} – елемент платіжної матриці, розташований на перетині i -го рядка і j -го стовпчика:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Максимальний елемент у розрахованому стовпчику S_i ($i = 1, m$) математичних сподівань виграшів,

$$S_{\max} = \max_i S_i(x_1, \dots, x_n),$$

визначає найвигіднішу стратегію активного гравця і кількісно дорівнює максимально можливому виграшу. Якщо максимальних елементів у цьому стовпчику два або більше, то можуть використовуватись відповідні їм стратегії як у чистому вигляді, так і в будь-якій комбінації. Такий підхід до розв'язку ігор проти природи має місце тільки в тому випадку коли ймовірності станів природи задані.

Часто доводиться приймати рішення за умов відсутності інформації про такі ймовірності. Тоді, знаючи можливий перелік станів природи, вважають їх рівноймовірними. При цьому для вибору оптимальної стратегії можна використати критерій максимуму математичного сподівання виграшу (критерій Лапласа), але цей критерій може застосовуватись тільки для рівномірного розподілу ймовірностей $x_i = 1/n$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Розглянемо інші критерії, які застосовуються для розв'язку ігор з природою в умовах невизначеності.

Максимінний критерій Вальда

У цьому випадку вибирається рішення, яке гарантує отримання виграшу не менше

$$S_B = \max_i \min_j a_{ij}.$$

Очевидно, що критерій Вальда може розглядатись як крайній песимізм в оцінці обставин. Згідно з ним рекомендується обирати таку з альтернатив стратегій, песимістична оцінка якої найкраща.

Максимаксний критерій

Цей критерій припускає, що стан природи буде для нас найсприятливішим, тому ми повинні вибрати рішення, яке забезпечує максимальний виграш серед максимально можливих, тобто

$$S_m = \max_i \max_j a_{ij}.$$

На протилежність критерію Вальда критерій максимаксу можна розглядати як крайній оптимізм в оцінці обставин при прийнятті рішення.

Критерій (песимізму – оптимізму) Гурвиця

Постає логічним, щоб при виборі рішення замість двох крайностей в оцінці ситуації (оптимізм – песимізм) притримуватися деякої проміжної позиції, яка враховує можливість як найгіршої, так і найкращої поведінки природи. Такий компромісний критерій був запропонований Гурвицем. На його думку, ми повинні для кожного рішення визначати лінійну комбінацію мінімального і максимального виграшу і обрати ту стратегію, для якої ця величина буде найбільшою:

$$S_r = \max_i [\alpha \max_j a_{ij} + (1 - \alpha) \min_j a_{ij}],$$

де $\alpha (0 \leq \alpha \leq 1)$ – ступінь оптимізму. При $\alpha = 0$ критерій Гурвиця переходить в максимінний критерій Вальда; при $\alpha = 1$ – збігається з максимаксним критерієм. На вибір значення ступеня оптимізму впливає міра відповідальності: чим більші наслідки помилкових рішень, тим більше бажання застрахуватись, тим ближче α до нуля.

Критерій (мінімаксного ризику) Севіджа

Суть цього критерію полягає у виборі такого рішення, щоб не допустити надмірно великих втрат, до яких може призвести прийняття помилкового рішення. Для цього будується "матриця ризиків", елементи якої показують, який збиток понесемо, якщо для кожного стану природи не виберемо найкращого рішення.

Ризиком гравця при виборі деякого рішення (стратегії) A_i в умовах B_j називається різниця між максимальним виграшем, який можна отримати в цих умовах, і виграшем, який отримає гравець у тих же умовах, застосовуючи стратегію A_i . Позначимо цю величину через r_{ij} . Якби гравець знав наперед майбутній стан природи P_j , він вибрав би стратегію, яка б відповідала максимальному елементу в указаному стовпчику: $\max a_{ij}$. Тоді, за визначенням, ризик дорівнює

$$r_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij}.$$

Матриця ризиків будується так:

- 1) визначається для кожного стану природи (стовпчика) найбільший елемент;
- 2) елемент матриці ризиків одержується відніманням з максимального елемента цього стовпчика відповідного елемента платіжної матриці.

Критерій Севіджа рекомендує в умовах невизначеності вибирати рішення, яке забезпечує мінімальне значення максимального ризику:

$$S_c = \min_i \max_j r_{ij} = \min_i \max_j (\max_i a_{ij} - a_{ij}).$$

Критерій Байєса – Лапласа

Застосовуючи цей критерій, відступають від умов повної невизначеності (відсутності інформації про стан природи), вважаючи, що можливим станам природи можна приписати визначену ймовірність їх появи x_i , $i = 1, 2, \dots, n$. У цьому випадку, визначивши математичне сподівання

виграшу для кожного рішення, вибирають те, яке забезпечує найбільше значення виграшу:

$$S_{\text{БЛ}} = \max_i \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$$

Принцип Байєса-Лапласа можна застосовувати, якщо стани природи, які вивчаються, і рішення, які приймаються, багаторазово повторюються. Тоді, наприклад, статистичними методами, базуючись на частотах появи окремих станів природи в минулому, можна оцінювати ймовірності їх появи в майбутньому. При одиничних рішеннях, які не повторюються, принцип Байєса-Лапласа застосовувати не можна навіть, тоді коли стани природи повторюються. Це зумовлено тим, що такі рішення порушують стаціонарність розподілу ймовірностей природи.

Критерій Ходжа-Лемана

Цей критерій є проміжним між критерієм Байєса і максимінним критерієм Вальда. Якщо є сумніви щодо достовірності інформації про ймовірності станів навколишнього середовища, то можна ввести відповідний параметр $u \in [0,1]$ – параметр достовірності інформації про ймовірності станів навколишнього середовища. Чим менше значення u , тим сильніше на прийняття рішення впливає виключення ризику за критерієм Вальда.

$$S_i = u \cdot \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + (1-u) \cdot \min_j a_{ij}, \quad i = 1, \dots, m,$$

Тоді оптимальна стратегія

$$S_{\text{ХЛ}} = \max_i S_i.$$

При $u = 0$ маємо критерій Вальда.

При $u = 1$ маємо критерій Байєса.

Перераховані вище критерії не вичерпують всього різноманіття критеріїв вибору рішення в умовах невизначеності, зокрема критеріїв вибору найкращих змішаних стратегій.

Оптимальна поведінка здебільшого залежить від прийнятого критерію оптимізації. Тому вибір критерію є найвідповідальнішим питанням у дослідженні операцій. Кожний вибір критерію зумовлює схвалення рішення, яке може відрізнятись від рішення, прийнятого у відповідності з іншим критерієм. Однак ситуація ніколи не буває настільки невизначеною, щоб не можна було отримати хоча б часткової інформації про ймовірності розподілення станів природи в ситуації, яка аналізується. У цьому випадку, оцінивши розподіл ймовірностей станів природи, застосовують критерій Байєса-Лапласа або проводять експеримент, який дає змогу уточнити поведінку природи.

8.5. Біматричні ігри з ненульовою сумою

Вище було розглянуто парні ігри з нульовою сумою, які цілком визначаються однією платіжною матрицею. Оптимальними називаються такі *стратегії* $\bar{y}^*$ і $\bar{x}^*$ відповідно для сторін А і В, що задовольняють умови (8.4), при яких жодному з гравців не вигідно відхилитись від цих стратегій. Таке положення називається ситуацією (точкою) рівноваги. Як відомо, ігри з нульовою сумою завжди мають хоча б один оптимальний розв'язок $(\bar{y}^*, \bar{x}^*)$, тобто хоча б одну точку рівноваги з ціною гри $C = S(\bar{y}^*, \bar{x}^*)$. Як правило, такий розв'язок єдиний. Але, навіть, коли таких точок рівноваги не одна, ціна гри в них завжди однакова і дорівнює $C = S(\bar{y}_i^*, \bar{x}_i^*)$ ($i=1,2,\dots$). Тому такі точки рівноваги вважаються еквівалентними і в загальному випадку можна вважати, що ігри з нульовою сумою завжди мають єдиний оптимальний розв'язок.

На відміну від ігор з нульовою сумою, існують ігри з ненульовою сумою, в яких необов'язково, щоб один із гравців виграв, а другий програв; вони можуть і вигравати і програвати одночасно. Оскільки

інтереси гравців у таких іграх не повністю протилежні, їх поведінка стає різноманітнішою. Так, наприклад, якщо в грі з нульовою сумою кожному гравцеві не вигідно було повідомляти другому свою стратегію (це могло зменшити його виграш), то в грі з ненульовою сумою стає бажаним координувати свої дії з партнером, або якимсь чином впливати на його дії.

Ігри з ненульовою сумою називають також біматричними, оскільки вони визначаються або двома матрицями, які вказують платежі (виграші) кожної сторони A і B :

$A \setminus B$	B_1	...	B_n
A_1	a_{11}	...	a_{1n}
...	...	...	...
A_m	a_{m1}	...	a_{mn}

$A \setminus B$	B_1	...	B_n
A_1	b_{11}	...	b_{1n}
...	...	...	...
A_m	b_{m1}	...	b_{mn}

або однією блочною матрицею, елементами якої є пари чи блоки (a_{ij}, b_{ij}) ,

$A \setminus B$	B_1	...	B_n
A_1	(a_{11}, b_{11})	...	(a_{1n}, b_{1n})
...	...	...	...
A_m	(a_{m1}, b_{m1})	...	(a_{mn}, b_{mn})

Існує два різновиди біматричних ігор – безколяційні (некооперативні), які забороняють будь-яке співробітництво сторін, і кооперативні, які допускають таке співробітництво. Очевидно, що кооперативні ігри – це складніший об'єкт дослідження (хоча б тому, що форми кооперації можуть бути найрізноманітніші).

8.5.1. Некооперативні ігри

У більшості економіко-виробничих, військово-політичних, екологічних і адміністративно-юридичних конфліктів метою кожного учасника є одержання щомога більшого індивідуального виграшу. Учасники таких конфліктів можуть, наприклад, виграти всі одночасно. Тому інтереси учасників, які не збігаються, виявляються не цілком

протилежними, що робить конфлікт неантагоністичним. Такий конфлікт може моделюватися *безкоаліційною (некооперативною) грою*, якщо він відповідає таким умовам.

1. Конфлікт визначається неантагоністичною взаємодією учасників.
2. Учасники конфлікту не можуть (або не мають права) укласти взаємозобов'язуючі угоди.
3. Власні дії сторони виконують незалежно одна від одної, тобто кожна з них не має інформації про дії, які чинить друга сторона; результати цих дій оцінюються дійсними числами, які визначають корисність ситуації, що склалася для кожної зі сторін.
4. Кожна з конфліктних сторін знає як для себе, так і для інших корисність будь-якої можливої ситуації, що може скластися в результаті їх взаємодії.

Розглянемо детальніше некооперативні ігри. У цьому випадку важливу роль відіграють ситуації рівноваги, які характеризуються тим, що жодній зі сторін не вигідно їх порушувати. Позначимо, як і раніше, через $\bar{y} = (y_1, \dots, y_m)$ і $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ змішані стратегії гравців А і В. Тоді їхні середні виграші будуть відповідно дорівнювати

$$S_A(\bar{y}, \bar{x}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} y_i x_j; \quad S_B(\bar{y}, \bar{x}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n b_{ij} y_i x_j. \quad (8.15)$$

Якщо серед згаданих стратегій є $\bar{y}^* = (y_1^*, \dots, y_m^*)$ і $\bar{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$, які задовольняють умови

$$S_A(\bar{y}, \bar{x}^*) \leq S_A(\bar{y}^*, \bar{x}^*); \quad S_B(\bar{y}^*, \bar{x}) \leq S_B(\bar{y}^*, \bar{x}^*), \quad (8.16)$$

то використання $\bar{y}^*$ і $\bar{x}^*$ створює ситуацію рівноваги.

Теорія стверджує, що кожна некооперативна біматрична гра має хоча б одну ситуацію (точку) рівноваги, яка визначається нерівностями (8.16). Коли така точка (пара) $(\bar{y}, \bar{x})$ єдина, вона може бути прийнята за оптимальні стратегії $\bar{y}^*$ і $\bar{x}^*$ сторін А і В. Невизначеність виникає тоді, коли існує не одна точка рівноваги, яка задовольняє умови (8.16).

Причому, на відміну від ігор з нульовою сумою, виграші сторін А і В у цих точках різняться – вони не є еквівалентними.

Розглянемо цю ситуацію на простому прикладі.

Приклад 8.4. Нехай блочна матриця платежів (табл. 8.4) має вигляд

Таблиця 8.4

$A \setminus B$	B_1	B_2
A_1	(7,3)	(0,0)
A_2	(0,0)	(3,7)

Прямою підстановкою у формули (8.15) легко перевірити, що чисті стратегії $\bar{y}_1^*=(1,0)$, $\bar{x}_1^*=(1,0)$, а також $\bar{y}_2^*=(0,1)$, $\bar{x}_2^*=(0,1)$ задовольняють умови рівноваги. Виграші сторін А і В, в цих точках рівноваги відповідно дорівнюють

$$S_A(\bar{y}_1^*, \bar{x}_1^*) = 7; S_B(\bar{y}_1^*, \bar{x}_1^*) = 3; S_A(\bar{y}_2^*, \bar{x}_2^*) = 3; S_B(\bar{y}_2^*, \bar{x}_2^*) = 7$$

Перевіримо тепер, чи є точки рівноваги серед змішаних стратегій сторін А і В.

Оскільки

$$y_1+y_2=1; x_1+x_2=1; m=n=2,$$

то із співвідношень (8.15) і табл. 8.4 випливає, що середні виграші сторін А і В відповідно дорівнюють

$$S_A(\bar{y}, \bar{x}) = 7y_1x_1 + 3y_2x_2 = 7y_1x_1 + 3(1-y_1)(1-x_1), \quad (8.17)$$

$$S_B(\bar{y}, \bar{x}) = 3y_1x_1 + 7y_2x_2 = 3y_1x_1 + 7(1-y_1)(1-x_1),$$

тобто S_A і S_B є функціями від двох змінних y_1 і x_1 :

$$S_A(y_1, x_1) = 7y_1x_1 + 3(1-y_1)(1-x_1);$$

$$S_B(y_1, x_1) = 3y_1x_1 + 7(1-y_1)(1-x_1).$$

Ситуація рівноваги характеризується тим, що стороні А не вигідно змінювати свою стратегію y_1 , а стороні В – свою стратегію x_1 , бо це приведе до зменшення їх середніх виграшів. Звідси випливає, що умови рівноваги в цьому випадку мають вигляд

$$\begin{cases} \frac{\partial S_A}{\partial y_1} = 7x_1 - 3(1-x_1) = 0, \\ \frac{\partial S_B}{\partial x_1} = 3y_1 - 7(1-y_1) = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь, знаходимо третю точку рівноваги серед змішаних стратегій відповідно для сторін А і В:

$$y_1^* = 0,7; y_2^* = 1 - 0,7 = 0,3; x_1^* = 0,3; x_2^* = 1 - 0,3 = 0,7,$$

тобто

$$\bar{y}_3^* = (0,7; 0,3); \bar{x}_3^* = (0,3; 0,7)$$

з виграшами, які обчислюються за формулами (8.17):

$$S_A(\bar{y}_3^*, \bar{x}_3^*) = 2,1; S_B(\bar{y}_3^*, \bar{x}_3^*) = 2,1.$$

Легко перевірити, що в цій точці виконуються умови рівноваги (8.16):

$$S_A(\bar{y}, \bar{x}_3^*) = 7y_1 \cdot 0,3 + 3(1-y_1) \cdot 0,7 = 2,1 = S_A(\bar{y}_3^*, \bar{x}_3^*),$$

$$S_B(\bar{y}_3^*, \bar{x}) = 3x_1 \cdot 0,7 + 7(1-x_1) \cdot 0,3 = 2,1 = S_B(\bar{y}_3^*, \bar{x}_3^*).$$

Очевидно, що перша ситуація (точка) рівноваги вигідніша для сторони А, друга – для сторони В. У третій точці рівноваги виграші сторін однакові, але вони менші, ніж в першій і другій точках рівноваги. Врешті важко зрозуміти, до якого результату можуть прийти сторони А та В і як вони повинні діяти.

Таким чином, якщо точок (ситуацій) рівноваги не одна, однозначних рекомендацій для вибору оптимальних стратегій для сторін А і В дати неможливо. У багатьох випадках взаємні контакти і погодження між сторонами А і В дають змогу це зробити. Взагалі некооперативні ігри досліджуються в кожному конкретному випадку окремо.

Приклад 8.5. Розглянемо задачу планування випуску побічної продукції (неантагоністичний випадок) [4, 19].

Припустимо, що два підприємства можуть випускати побічну продукцію в тих самих виробничих умовах, що і в антагоністичному випадку, але можливість збуту цієї продукції змінилася. Тепер, згідно з прогнозом соціологів, якщо перше підприємство (гравець І) буде

випускати продукцію типу A_i ($1 \leq i \leq m$), а друге (гравець II) – продукцію типу B_j ($1 \leq j \leq n$), то в місті знайде збут a_{ij} товарів типу A_i та b_{ij} товарів типу B_j . Оскільки збут продукції будь-якого підприємства залежить від того, яку продукцію випускає друге підприємство, а кожне підприємство намагається максимізувати обсяг реалізованої продукції, маємо виробничо-торговий конфлікт. Цей конфлікт моделюється грою тих же гравців I та II з тими ж відповідно m і n стратегіями у кожного, що і в антагоністичній грі. Але ця гра є неантагоністичною, оскільки сума реалізованої продукції буде залежати тепер від ситуації, яка може скластися.

Приймаючи прибуток від продажу одиниць товару рівним одиниці, а корисність гравців I та II рівними їх прибуткам, змоделюємо цей конфлікт біматричної грою, що задається парою матриць

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \text{ і } B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}},$$

де a_{ij} і b_{ij} – виграші відповідно гравців I та II в ситуації (i, j) .

Розглянемо розв'язок цієї гри на конкретному числовому прикладі, прийнявши, що підприємства I та II планують випускати побічну продукцію типів відповідно A_i ($i=1, 2$) і B_j ($j=1, 2$), а очікувані прибутки від реалізації цієї продукції задані матрицями:

$$A = \begin{pmatrix} 600 & 300 \\ 300 & 900 \end{pmatrix} \text{ і } B = \begin{pmatrix} 500 & 1500 \\ 2000 & 500 \end{pmatrix}.$$

Необхідно визначити тип продукції, який має сенс випускати кожному підприємству.

Позначимо

$$\begin{aligned} A^* &= a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}, & a &= a_{22} - a_{12}; \\ B^* &= b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}, & b &= b_{22} - b_{21}. \end{aligned}$$

Якщо $A^* \neq 0$ і $B^* \neq 0$, то гра має ситуацію рівноваги у змішаних стратегіях, а саме

$$\bar{x}^* = (x_1^*, 1 - x_1^*), \quad \bar{y}^* = (y_1^*, 1 - y_1^*),$$

де

$$x_1^* = \frac{b}{B^*}, \quad y_1^* = \frac{a}{A^*}.$$

У результаті обчислень одержимо

$$A^* = 900, \quad a = 600; \quad B^* = -2500, \quad b = -1500.$$

Отже, ситуацію рівноваги утворюють вектори

$$\bar{x}^* = (3/5, 2/5), \quad \bar{y}^* = (2/3, 1/3),$$

а математичне сподівання вигравів гравців I та II в ситуації рівноваги будуть відповідно дорівнювати

$$S_A(\bar{y}^*, \bar{x}^*) = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})x_1^*y_1^* + (a_{12} - a_{22})x_1^* + (a_{21} - a_{22})y_1^* + a_{22} = 500,$$

$$S_B(\bar{y}^*, \bar{x}^*) = (b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22})x_1^*y_1^* + (b_{12} - b_{22})x_1^* + (b_{21} - b_{22})y_1^* + b_{22} = 1100.$$

Одержаний результат означає, що підприємство А вибирає випуск продукції типу A_1 і A_2 з ймовірностями, рівними відповідно $3/5$ і $2/5$, а підприємство В – випуск продукції B_1 і B_2 з ймовірностями відповідно $2/3$ і $1/3$. При цьому математичне сподівання числа реалізованого товару підприємств А і В відповідно буде дорівнювати 500 та 1100 у.о.

8.5.2. Кооперативні ігри

Більшість неантагоністичних конфліктів в економіці і суміжних з нею галузях характеризується тим, що їх учасники можуть шляхом кооперування об'єднувати свої зусилля. Співробітництво між гравцями приводить до якісно нового конфлікту в порівнянні з некооперативним випадком.

Як ми бачили, в некооперативних іграх відхилення одного із учасників від ситуації рівноваги не дає йому ніякої переваги. Але при відхиленні декількох гравців вони можуть одержати більший виграв, ніж в ситуації рівноваги. Тому в умовах, в яких можлива кооперація між

гравцями, принцип рівноваги не справджує себе. Так, наприклад, нехай неантагоністична гра задана такими матрицями:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тут єдиною ситуацією рівноваги буде ситуація $\bar{y}_1^* = (0,1)$, $\bar{x}_1^* = (0,1)$ в якій кожний з гравців вибирає свою другу чисту стратегію і виграє одиницю. Разом з тим очевидно, що якщо гравці домовляться і виберуть свої перші чисті стратегії, то в ситуації $\bar{y}_2^* = (1,0)$, $\bar{x}_2^* = (1,0)$ кожний з них виграє по п'ять одиниць. Проте ясно, що ця ситуація, яка може скластися у разі кооперування, є досить нестійкою, оскільки кожний гравець, змінюючи в ній довільним чином свою стратегію, збільшує свій виграш.

Розглянемо попередню задачу 8.5 за умови кооперації гравців і визначимо як зміняться розв'язки.

Приклад 8.6. Задача планування випуску побічної продукції (кооперативний випадок) [4, 19].

Нехай два підприємства можуть випускати побічну продукцію у виробничих умовах, прийнятих у прикладі з антагоністичним випадком, але з врахуванням можливостей збуту, як у некооперативному випадку. Тоді, як було встановлено, такий конфлікт моделюється кінцевою грою двох осіб з ненульовою сумою, заданою парою $m \times n$ матриць $A = (a_{ij})$ і $B = (b_{ij})$, елементи яких – виграші (в одиницях корисності) відповідно гравців I та II при умовах вибору ними відповідно своїх i -ї та j -ї чистих стратегій. Нехай тепер в цій грі, урахувуючи природу конфлікту, допускається кооперування без передачі корисності від одного гравця до другого, тобто гравці можуть укласти угоди і вибрати сумісну стратегію $\bar{z}$. Очевидно

$$\bar{z} = (z_{11}, \dots, z_{ij}, \dots, z_{mn}),$$

$$z_{ij} \geq 0, \quad \sum_{i,j} z_{ij} = 1,$$

де z_{ij} – ймовірність вибору гравцями I та II відповідно сумісних стратегій (i, j) .

Математичне сподівання виграшу відповідно гравців I та II при умовах застосування ними стратегії $\bar{z}$ природньо визначається за формулами:

$$S_A(\bar{z}) = \sum_{i,j} a_{ij} z_{ij},$$

$$S_B(\bar{z}) = \sum_{i,j} b_{ij} z_{ij}.$$

Точки $(S_A(\bar{z}), S_B(\bar{z}))$ утворюють допустиму множину P . Діючи за угодою, гравці можуть одержати як виграш довільний вектор з цієї множини $(\bar{S}_A(\bar{z}), \bar{S}_B(\bar{z}))$.

Очевидно, що при сумісних діях гравці I та II повинні одержати виграш хоча б не менше, ніж значення антагоністичної гри $S_A(\bar{y}^*, \bar{x}^*)$ і $S_B(\bar{y}^*, \bar{x}^*)$, обчислені за формулою (8.15), які є виграшами гравців в тому випадку, коли вони не дійдуть до угоди.

Для знаходження $(\bar{S}_A(\bar{z}), \bar{S}_B(\bar{z}))$ застосуємо наступну *арбітражну схему*.

1. Початок координат переноситься у точку з координатами $S_A(\bar{y}^*, \bar{x}^*)$ і $S_B(\bar{y}^*, \bar{x}^*)$ (математичне сподівання виграшу гравців у ситуації рівноваги у некооперативному випадку), тобто ця точка перетворюється у точку (0,0), при цьому множина P перетворюється на множину P' .

2. Знаходиться єдина точка з координатами $\bar{S}'_A(\bar{y}^*, \bar{x}^*)$ і $\bar{S}'_B(\bar{y}^*, \bar{x}^*)$ із P' така, що $\bar{S}'_A(\bar{y}^*, \bar{x}^*) > 0$ і $\bar{S}'_B(\bar{y}^*, \bar{x}^*) > 0$, а $\bar{S}'_A(\bar{y}^*, \bar{x}^*) \cdot \bar{S}'_B(\bar{y}^*, \bar{x}^*)$ є максимумом всіх добутків $S'_A(\bar{y}^*, \bar{x}^*) \cdot S'_B(\bar{y}^*, \bar{x}^*)$.

3. Арбітражне рішення (ціну гри) знаходимо шляхом оберненого перетворення корисності відносно $\bar{S}'_A(\bar{y}^*, \bar{x}^*)$ і $\bar{S}'_B(\bar{y}^*, \bar{x}^*)$.

Знайдемо арбітражне рішення для конкретних даних задачі планування випуску побічної продукції в некооперативному випадку, тобто нехай кооперативна гра без побічних платежів задана такими матрицями

$$A = \begin{pmatrix} 600 & 300 \\ 300 & 900 \end{pmatrix} \text{ і } B = \begin{pmatrix} 500 & 1500 \\ 2000 & 500 \end{pmatrix}.$$

У некооперативному випадку ситуаціями рівноваги були вектори $\bar{x}^* = (3/5, 2/5)$, $\bar{y}^* = (2/3, 1/3)$. Як було досліджено, в умовах некооперативного варіанту біматричної гри, коли співробітництвом нехтують і гравці вибирають свої стратегії незалежно один від одного, математичне сподівання виграшу гравця I дорівнює $S_A(\bar{y}^*, \bar{x}^*) = 500$, а гравця II – $S_B(\bar{y}^*, \bar{x}^*) = 1100$.

Припустимо тепер, що гравці можуть кооперуватися і вибирати сумісну змішану стратегію без передачі корисності один одному.

Перетворимо координати шляхом перенесення початку координат в точку (500, 1100), за формулами

$$S'_A(\bar{y}^*, \bar{x}^*) = S_A(\bar{z}) - 500,$$

$$S'_B(\bar{y}^*, \bar{x}^*) = S_B(\bar{z}) - 1100,$$

побудувавши таким чином область P' .

Тоді платіжні матриці будуть мати вигляд

$$A' = \begin{pmatrix} 100 & -200 \\ -200 & 400 \end{pmatrix} \text{ і } B = \begin{pmatrix} -600 & 400 \\ 900 & -600 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо точку з координатами $\bar{S}'_A(\bar{y}^*, \bar{x}^*)$ і $\bar{S}'_B(\bar{y}^*, \bar{x}^*)$, яка максимізує функцію

$$S'_{AB} = S'_A(\bar{y}^*, \bar{x}^*) S'_B(\bar{y}^*, \bar{x}^*)$$

на множині P' при $\bar{S}'_A(\bar{y}^*, \bar{x}^*) > 0$ і $\bar{S}'_B(\bar{y}^*, \bar{x}^*) > 0$.

Оскільки гравцю А вигідніше застосовувати свою другу стратегію, складемо рівняння прямої, що проходить через точки $(-200, 900)$ і $(400, -600)$, має вигляд

$$S'_B(\bar{y}^*, \bar{x}^*) = -\frac{5}{2} S'_A(\bar{y}^*, \bar{x}^*) + 400.$$

Підставляючи це у функцію S'_{AB} , продиференціюємо одержаний вираз, прирівняємо похідну до нуля.

$$-5S'_A(y^*, x^*) + 400 = 0.$$

Розв'яжемо одержане рівняння відносно $S'_A(\bar{y}^*, \bar{x}^*)$ і знайдемо $\bar{S}'_A(\bar{y}^*, \bar{x}^*) = 400/5 = 80$, а $\bar{S}'_B(\bar{y}^*, \bar{x}^*) = 200$.

Далі шляхом оберненого перетворення знайдемо арбітражне рішення для вихідної кооперативної гри:

$$\bar{S}_A(\bar{z}) = 2900/5 = 580, \quad \bar{S}_B(\bar{z}) = 1300.$$

Арбітражне рішення можна реалізувати шляхом застосування сумісної змішаної стратегії $\bar{z} = (0, 0, z_{21}, z_{22})$. Компоненти стратегії $\bar{z}$ знаходимо із формул для розрахунків $\bar{S}_A(\bar{z})$, $\bar{S}_B(\bar{z})$, підставивши $S_A(\bar{z}) = \bar{S}_A(\bar{z})$, $S_B(\bar{z}) = \bar{S}_B(\bar{z})$. Тобто шукаємо розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} 300z_{21} + 900z_{22} = 580, \\ 2000z_{21} + 500z_{22} = 1300. \end{cases}$$

Знаходимо $z_{21} = 8/15$, $z_{22} = 7/15$. Отже, гравці повинні домовитися і застосувати сумісну змішану стратегію $\bar{z} = (0, 0, 8/15, 7/15)$, згідно з якою гравець I використовує тільки другу стратегію, а гравець II застосовує першу і другу відповідно з ймовірностями $8/15$ і $7/15$. У цьому випадку угода між гравцями призводить до того, що математичне сподівання виграшу гравців I та II будуть відповідно дорівнювати 580 у.о. (500 у.о. – що більше, ніж в некооперативному випадку) і 1300 у.о. (1100 у.о. – в некооперативному випадку).

Таким чином, кооперування в неантагоністичному конфлікті приводить до збільшення математичного сподівання виграшу (у сенсі корисності) кожного із гравців.

Приклади розв'язання задач

8.1. Знайти розв'язок гри, яка задається платіжною матрицею:

B \ A	у ₁	у ₂
	х ₁	х ₂
х ₁	2	5
х ₂	6	4

Розв'язання

Коли гравець В застосовує чисту стратегію В₁ або В₂, гравець А отримує середній виграш, який дорівнює ціні гри V:

$$2x_1 + 6x_2 = V,$$

$$5x_1 + 4x_2 = V,$$

де $x = (x_1, x_2)$ – змішана стратегія гравця А, для якої

$$x_1 + x_2 = 1$$

Розв'язуючи отриману систему трьох рівнянь з трьома невідомими, знайдемо:

$$x_1 = 2/5 = 0,4,$$

$$x_2 = 3/5 = 0,6,$$

$$V = 22/5 = 4,4.$$

Аналогічно, розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} 2y_1 + 5y_2 = V, \\ 6y_1 + 4y_2 = V, \\ y_1 + y_2 = 1, \end{cases}$$

знайдемо змішану стратегію гравця В:

$$y_1 = 0,2, y_2 = 0,8, V = 4,4.$$

8.2. Два підприємства виробляють продукцію і поставляють її на ринок регіону. Вони є єдиними постачальниками продукції в регіон, тому повністю визначають ринок даної продукції в регіоні.

Кожне з підприємств має можливість виробляти продукцію із застосуванням однієї з трьох різних технологій. У залежності від якості продукції, виробленої за кожною технологією, підприємства можуть встановити ціну одиниці продукції на рівні 12, 8 і 4 грошових одиниць відповідно. При цьому підприємства мають різні витрати на виробництво одиниці продукції (табл. 8.5).

Таблиця 8.5

Витрати на одиницю продукції, виробленої на підприємствах регіону (ВО)

Технологія	Ціна реалізації одиниці продукції, гр. од.	Повна собівартість одиниці продукції, гр. од.	
		Підприємство А	Підприємство В
1	12	8	10
2	8	5	4
3	4	2	1

У результаті маркетингового дослідження ринку продукції регіону була визначена функція попиту на продукцію

$$Y = 10 - 0.6X,$$

де Y – кількість продукції, яку придбає населення регіону (тис. од.), а X – середня ціна продукції підприємств, гр. од.

Значення частки продукції підприємства А, придбаної населенням, залежать від співвідношення цін на продукцію підприємства А та підприємства В. У результаті маркетингового дослідження ця залежність встановлена і значення обчислені (табл. 8.6).

*Частка продукції підприємства A , що купується населенням
в залежності від співвідношення цін на продукцію*

Ціна реалізації 1 од. продукції, гр. од.		Частка продукції підприємства A , купленої населенням, d
Підприємство A , p_1	Підприємство B , p_2	
12	12	0,31
12	8	0,33
12	4	0,18
8	12	0,7
8	8	0,3
8	4	0,2
4	12	0,92
4	8	0,85
4	4	0,72

У задачі необхідно визначити:

1. Чи існує в даному завданні ситуація рівноваги при виборі технологій виробництва продукції обома підприємствами?
2. Чи існують технології, які підприємства свідомо не будуть вибирати внаслідок не вигідності?
3. Скільки продукції буде реалізовано в ситуації рівноваги? Яке підприємство виявиться у вигравшому становищі?

Розв'язання

Однією з головних завдань кожного підприємства є максимізація прибутку від реалізації продукції. Але в даному випадку важливішою проблемою є конкурентна боротьба. У конкурентному конфлікті виграв буде визначатися не розміром прибутку кожного підприємства, а різницею їхніх прибутків. При такому підході конфлікт можна розглядати як

матричну гру двох гравців з нульовою сумою, тому що виграш одного підприємства дорівнює програшу іншого.

Формалізуємо конфліктну ситуацію – складемо платіжну матрицю.
Для цього визначимо стратегії кожного гравця:

A_1 – підприємство A вибирає технологію 1;

A_2 – підприємство A вибирає технологію 2;

A_3 – підприємство A вибирає технологію 3;

B_1 – підприємство B вибирає технологію 1;

B_2 – підприємство B вибирає технологію 2;

B_3 – підприємство B вибирає технологію 3.

Елементами платіжної матриці буде різниця прибутку підприємства A і підприємства B .

Знайдемо a_{11} (вибрані стратегії A_1 і B_1 – обидва підприємства реалізують продукцію за 12 гр. од.).

Прибуток = Дохід – Витрати

І дохід і витрати залежать від кількості купленої населенням продукції, яка визначається функцією попиту $Y = 10 - 0.6X$.

Середня ціна на продукцію дорівнює $X = (12 + 12) / 2 = 12$. Отже,
 $Y = 10 - 0.6 \cdot 12 = 10 - 7,2 = 2.8$ (тис. од.).

З таблиці 8.6 випливає, що у підприємства A куплять 31% від всієї купленої населенням продукції

$$2,8 \text{ тис. од.} \cdot 31\% = 2800 \text{ од.} \cdot 0,31 = 868 \text{ од.}$$

Тоді у підприємства B куплять 69% від всієї купленої населенням продукції

$$2,8 \text{ тис. од.} \cdot 69\% = 2800 \text{ од.} \cdot 0,69 = 1932 \text{ од.}$$

або

$$2800 - 868 = 1932 \text{ (од.)}$$

Отже,

прибуток $A = 868 * 12 - 868 * 8 = 868 * (12 - 8) = 868 * 4 = 3472$ гр. од.,

прибуток $B = 1932 * (12 - 10) = 1932 * 2 = 3864$ гр. од.

$$a_{11} = 3472 - 3864 = -392 \text{ (од.)} = -0,392 \text{ (тис. од.)}$$

Можна використовувати наступну формулу для розрахунку елементів платіжної матриці

$$a_{ij} = (10 - 0.3 \cdot (p_1 + p_2)) \cdot 1000 \cdot (d \cdot (p_1 - s_1) - (1 - d) \cdot (p_2 - s_2)),$$

де p_1 – вартість реалізації одиниці продукції підприємством A під час вибору ним стратегії A_i ;

p_2 – вартість реалізації одиниці продукції підприємством B при виборі ним стратегії B_j ;

s_1 – собівартість одиниці продукції підприємства A при виборі ним стратегії A_i ;

s_2 – собівартість одиниці продукції підприємства B при виборі ним стратегії B_j ;

d – частка продукції підприємства A , купленої населенням при цінах p_1 і p_2 .

Провівши всі розрахунки, отримуємо платіжну матрицю (в тис. од.)

	B_1	B_2	B_3
A_1	-0,392	-5,44	-9,048
A_2	6	-9,88	-11,52
A_3	8,736	7,04	4,56

1) Перевіримо наявність ситуації рівноваги – сідлової точки. Для цього знайдемо нижню і верхню ціни гри.

У кожному рядку визначимо мінімальний елемент і запишемо його в новому стовпчику, а із знайдених мінімальних виберемо максимальний: $\alpha = 4,56$ – нижня ціна гри.

У кожному стовпці знайдемо максимальний елемент і запишемо їх в новому рядку і з них виберемо мінімальний $\beta = 4,56$ – верхня ціна гри.

	B_1	B_2	B_3	min	max
A_1	-0,392	-5,44	-9,048	-9,048	
A_2	6	-9,88	-11,52	-11,52	4,56
A_3	8,736	7,04	4,56	4,56	
max	8,736	7,04	4,56		
min		4,56			

Так як $\alpha = \beta = 4,56$, то в конфліктній ситуації є точка рівноваги – сідлова точка, яку утворюють стратегії (A_3, B_3) .

Якщо одне підприємство буде дотримуватися своєї оптимальної стратегії, то найкраща поведінка другого підприємства – також дотримуватися своєї оптимальної стратегії. У додатку до умови це означає, що підприємствам необхідно використовувати свої треті технології і мінімальні ціни реалізації.

2) Визначимо наявність свідомо невігідних стратегій у підприємств. Так як елементи третього рядка більше відповідних елементів першого рядка і другого рядка, то стратегії A_1 і A_2 – явно невігідні, оскільки підприємство A прагне максимізувати різницю прибутків.

Аналогічно для підприємства B . Всі елементи третього стовпчика менше відповідних елементів першого і другого стовпчиків, значить стратегії B_1 і B_2 – свідомо невігідні (домінуючі).

3) У ситуації рівноваги буде реалізовано 7600 одиниць продукції ($Y = 10 - 0.6(4 + 4)/2 = 7.6$). У першого підприємства куплять 5472 од. продукції, а в другого 2128 од. продукції. У вигравшому становищі буде підприємство A .

8.3. Матричну гру 2×2 розв'язати в змішаних стратегіях:

- 1) аналітично (для гравця A); геометрично (для гравця B);
- 2) провести моделювання результатів гри за допомогою таблиці рівномірно розподілених випадкових чисел, розігравши 30 партій; визначити відносні частоти використання чистих стратегій кожним

гравцем і середній виграш, порівнявши результати з отриманими теоретично в п.1.

Гра задана платіжною матрицею

$$P = \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 8 & 11 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

1) Знайдемо аналітично оптимальну стратегію гравця A і відповідну ціну гри $X^*(p_1, p_2)$, ν . Оскільки X^* – оптимальна, то вона повинна гарантувати середній виграш гравця A , що дорівнює ціні гри при будь-якій поведінці гравця B :

для стратегії B_1 : $10p_1 + 8p_2 = \nu$;

для стратегії B_2 : $7p_1 + 11p_2 = \nu$.

З урахуванням того, що сума компонентів змішаної стратегії дорівнює 1, отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 10p_1 + 8p_2 = \nu, \\ 7p_1 + 11p_2 = \nu, \\ p_1 + p_2 = 1. \end{cases}$$

Розв'яжемо дану систему рівнянь, використовуючи Mathcad

Given

$$10p_1 + 8p_2 = \nu$$

$$7p_1 + 11p_2 = \nu$$

$$p_1 + p_2 = 1$$

$$\text{find}(p_1, p_2, \nu) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 9 \end{pmatrix}$$

Знайдемо геометрично оптимальну змішану стратегію гравця B : $Y^*(q_1, q_2)$. Стратегію A_1 зобразимо точками з ординатами 10 і 7 на прямих B_1 і B_2 відповідно. Стратегію A_2 – точками з ординатами 8 і 11 (див. рис. 8.3). Кожній точці на відрізку $[0; 1]$ відповідає змішана стратегія гравця B . Серед них оптимальною буде та, яка визначається найнижчою точкою ламаної A_1MA_2 , тобто точкою M . Для знаходження компонентів

оптимальної стратегії гравця В треба знайти координати точки М, причому якщо М (х, у), то $q_1 = 1 - x$, $q_2 = x$, $v = y$. Для цього знайдемо рівняння прямих A_1A_1 і A_2A_2 , скориставшись рівнянням прямої, що проходить через дві задані точки

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Так як $A_1(0; 10)$ і $A_1(1, 7)$, то

$$\frac{x - 0}{1 - 0} = \frac{y - 10}{7 - 10}, \quad x = \frac{y - 10}{-3}.$$

Тобто рівняння прямої A_1A_1 має вигляд: $3x + y - 10 = 0$.

Так як $A_2(0; 8)$ і $A_2(1; 11)$, то

$$\frac{x - 0}{1 - 0} = \frac{y - 8}{11 - 8}, \quad x = \frac{y - 8}{3}.$$

Тобто рівняння прямої A_2A_2 має вигляд: $3x - y + 8 = 0$.

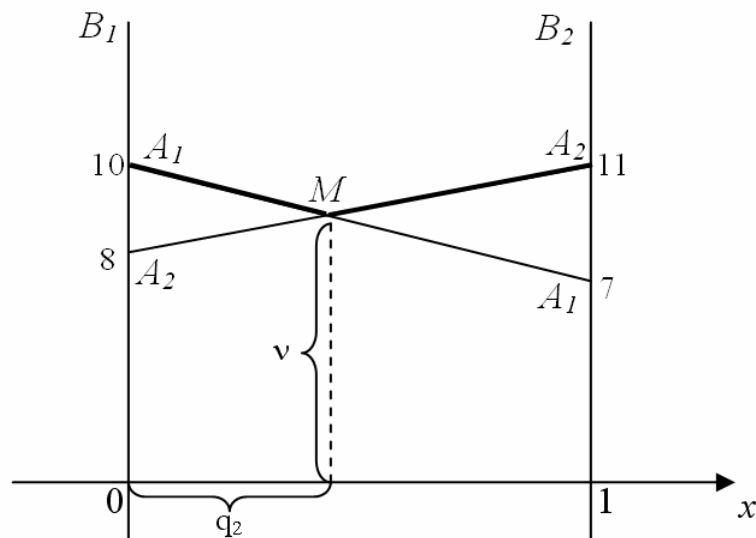


Рис. 8.3. Геометрична інтерпретація матричної гри для гравця В

Знайдемо координати точки М, вирішивши систему рівнянь прямих

A_1A_1 і A_2A_2 :

Given

$$3x + y - 10 = 0$$

$$3x - y + 8 = 0$$

$$\text{find}(x, y) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 9 \end{pmatrix}$$

Отже, $M(\frac{1}{3}, 9)$, тоді $v=9$, $Y^*(1-\frac{1}{3}, 9)$ або $Y^*(\frac{2}{3}, 9)$.

2) Проведемо моделювання результатів розв'язання за допомогою таблиці рівномірно розподілених випадкових чисел (див. додаток). Для 30 партій вистачить 60 чисел, на основі яких будуть вибиратися стратегії гравцями. Використовувані випадкові числа згенеровані в MS Excel функцією = RAND (). У додатку 3 досить багато чисел, але використовувати для моделювання можна будь-які 60, вибрані довільно з будь-якого місця таблиці. Ми візьмемо числа з першого блоку (для гравця А використовується 1, 3 та 5 стовпчики).

Будемо вибирати стратегії гравців, використовуючи геометричне визначення ймовірності. Так як всі випадкові числа з відрізка $[0, 1]$, то щоб стратегія A_1 з'являлася приблизно в половині випадків, будемо її вибирати якщо випадкове число менше 0,5; в інших випадках вибирається стратегія A_2 . Аналогічно для гравця В. Стратегію B_1 будемо вибирати, якщо відповідне випадкове число менше $\frac{2}{3} \approx 0.67$, в іншому випадку вибираємо стратегію B_2 .

Заповнимо розрахункову таблицю

Номер партії	Випадкове число гравця А	Стратегія гравця А (A1: <0,5)	Випадкове число гравця В	Стратегія гравця В (B1: < 0,667)	Виграш А	Накопичений виграш А	Середній виграш А (ціна гри)
1	0,029	A1	0,125	B1	10	10	10,000
2	0,611	A2	0,490	B1	8	18	9,000
3	0,766	A2	0,958	B2	11	29	9,667
4	0,738	A2	0,564	B1	8	37	9,250
5	0,944	A2	0,257	B1	8	45	9,000
6	0,416	A1	0,886	B2	7	52	8,667
7	0,513	A1	0,226	B1	10	62	8,857
8	0,717	A2	0,467	B1	8	70	8,750
9	0,994	A2	0,822	B2	11	81	9,000
10	0,412	A1	0,244	B1	10	91	9,100
11	0,259	A1	0,176	B1	10	101	9,182
12	0,610	A2	0,658	B1	8	109	9,083
13	0,207	A1	0,451	B1	10	119	9,154
14	0,071	A1	0,994	B2	7	126	9,000
15	0,391	A1	0,724	B2	7	133	8,867
16	0,835	A2	0,469	B1	11	144	9,000
17	0,062	A1	0,392	B1	10	154	9,059

Номер партії	Випадкове число гравця А	Стратегія гравця А (A1: <0,5)	Випадкове число гравця В	Стратегія гравця В (B1: < 0,667)	Виграш А	Накопичений виграш А	Середній виграш А (ціна гри)
18	0,181	A1	0,457	B1	10	164	9,111
19	0,891	A2	0,336	B1	8	172	9,053
20	0,375	A1	0,094	B1	10	182	9,100
21	0,009	A1	0,522	B1	10	192	9,143
22	0,255	A1	0,806	B2	7	199	9,045
23	0,273	A1	0,562	B1	10	209	9,087
24	0,111	A1	0,805	B2	7	216	9,000
25	0,888	A2	0,037	B1	8	224	8,960
26	0,392	A1	0,341	B1	10	234	9,000
27	0,843	A2	0,808	B2	11	245	9,074
28	0,086	A1	0,585	B1	10	255	9,107
29	0,426	A1	0,370	B1	10	265	9,138
30	0,562	A2	0,688	B2	11	276	9,200

Таким чином, в результаті моделювання в 30 партіях ціна гри дорівнює 9,2. Цей результат узгоджується з теоретичної ціною гри 9. Частоти використання гравцями своїх чистих стратегій відповідно рівні: X (18/30; 12/30), Y (21/30, 9 / 30) або X (0,6, 0,4), Y (0,7; 0,3).

Порівнюючи з теоретичними оптимальними стратегіями $X^*(0,5; 0,5)$ і $Y^*(0,67; 0,33)$ можна зробити висновок, що результати моделювання досить близько їм відповідають навіть для невеликої кількості партій.

8.4. Дві галузі можуть здійснювати капітальні вкладення в 3 об'єкта. Стратегії галузей: і-та стратегія полягає у фінансуванні і-го об'єкта ($i = 1,2,3$). Враховуючи особливості вкладів і місцеві умови, прибутки першої галузі виражаються наступною матрицею

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 6 \\ 5 & 2 & -3 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Величина прибутку першою галуззю вважається такою ж величиною збитку для другої галузі – представлена гра може розглядатися як гра двох гравців з нульовою сумою.

Визначити оптимальні стратегії гравців та ціну гри.

Розв'язання

Фрагмент робочого документа Mathcad із відповідними обчисленнями і коментарями наведено нижче.

ORIGIN:=1

Задамо платіжну матрицю A

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 6 \\ 5 & 2 & -3 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Щоб звести матричну гру для гравця A до задачі лінійного програмування перетворимо платіжну матрицю так, щоб всі її елементи були більше нуля. Для цього додамо до всіх елементів матриці число 4. Отримуємо наступну платіжну матрицю B

$$B := A + 4$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 10 \\ 9 & 6 & 1 \\ 2 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Задамо цільову функцію

$$zA(x) := x_1 + x_2 + x_3$$

Знайдемо значення змінних x_1 , x_2 , x_3 , при яких функція zA досягає мінімального значення

$$x_1 := 1$$

$$x_2 := 1$$

$$x_3 := 1$$

Given

$$B_{1,1}x_1 + B_{2,1}x_2 + B_{3,1}x_3 \geq 1$$

$$B_{1,2}x_1 + B_{2,2}x_2 + B_{3,2}x_3 \geq 1$$

$$B_{1,3}x_1 + B_{2,3}x_2 + B_{3,3}x_3 \geq 1$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_3 \geq 0$$

$$X := \text{Minimize}(zA, x)$$

$$X = \begin{pmatrix} 0.079 \\ 0.082 \\ 0.015 \end{pmatrix}$$

Знайдемо розв'язок гри для гравця A

$$zA(X) = 0.175$$

$$p := \frac{X}{zA(X)}$$

Тоді оптимальна змішана стратегія для гравця А:

$$p = \begin{pmatrix} 0.45 \\ 0.467 \\ 0.083 \end{pmatrix}$$

Знайдемо ціну гри для гравця А

$$vA := \frac{1}{zA(X)} + (-4)$$

$$vA = 1.717$$

Задамо цільову функцію

$$zB(y) := y_1 + y_2 + y_3$$

Знайдемо значення змінних y_1 , y_2 , y_3 , при яких функція zB досягає мінімального значення

$$y_1 := 1$$

$$y_2 := 1$$

$$y_3 := 1$$

Given

$$B_{1,1}y_1 + B_{1,2}y_2 + B_{1,3}y_3 \leq 1$$

$$B_{2,1}y_1 + B_{2,2}y_2 + B_{2,3}y_3 \leq 1$$

$$B_{3,1}y_1 + B_{3,2}y_2 + B_{3,3}y_3 \leq 1$$

$$y_1 \geq 0$$

$$y_2 \geq 0$$

$$y_3 \geq 0$$

$$Y := \text{Maximize}(zB, y)$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0.076 \\ 0.044 \\ 0.055 \end{pmatrix}$$

Знайдемо розв'язок гри для гравця В

$$zB(Y) = 0.175$$

$$q := \frac{Y}{zB(Y)}$$

Оптимальна змішана стратегія для гравця В

$$q = \begin{pmatrix} 0.433 \\ 0.25 \\ 0.317 \end{pmatrix}$$

Знайдемо ціну гри для гравця В

$$vB := \frac{1}{zB(Y)} + (-4)$$

$$vB = 1.717$$

Як видно, $vA=vB$, отже, задача розв'язана вірно

8.5. Сільськогосподарське підприємство може реалізувати деяку продукцію

A1) відразу після збирання;

A2) в зимові місяці;

A3) у весняні місяці.

Прибуток залежить від ціни реалізації в даний період часу, витратами на зберігання і можливих втрат. Розмір прибутку, розрахований для різних станів-співвідношень доходу і витрат (S_1, S_2, S_3), протягом усього періоду реалізації, представлений у вигляді матриці (млн. грн.)

$\begin{matrix} \text{S} \\ \text{A} \end{matrix}$	S_1	S_2	S_3
A_1	2	-3	7
A_2	-1	5	4
A_3	-7	13	-3

Визначити найбільш вигідну стратегію за всіма критеріями (критерій Байєса, критерій Лапласа, максимінний критерій Вальда, критерій песимізму-оптимізму Гурвиця, критерій Ходжа-Лемана, критерій мінімаксного ризику Севіджа), якщо імовірність станів попиту: 0,2, 0,5, 0,3, коефіцієнт песимізму $C = 0.4$; коефіцієнт достовірності інформації про стани попиту $u = 0.6$.

Розв'язання

Фрагмент робочого документа Mathcad із відповідними обчисленнями і коментарями наведено нижче.

ORIGIN:=1

Задамо матрицю A

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \\ -1 & 5 & 4 \\ -7 & 13 & 3 \end{pmatrix}$$

Задамо ймовірності станів попиту p

$$p := \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.5 \\ 0.3 \end{pmatrix}$$

1. Критерій Байеса

$$i := 1..3$$

$$W_i := \sum_{j=1}^3 (A_{i,j} \cdot p_j)$$

$$W = \begin{pmatrix} 1 \\ 3.5 \\ 4.2 \end{pmatrix}$$

Вибираємо максимальне значення

$$w := \max(W)$$

$$w = 4.2$$

Отже, за даним критерієм оптимальною є стратегія A_3 – продавати весною.

2. Критерій недостатності підстави Лапласа

$$W_i := \frac{1}{3} \cdot \sum_{j=1}^3 A_{i,j}$$

$$W = \begin{pmatrix} 2 \\ 2.667 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Вибираємо максимальне значення

Отже, за даним критерієм оптимальною є стратегія A_2 – продавати взимку.

$$w := \max(W)$$

$$w = 2.667$$

3. Максимінний критерій Вальда

$$W_i := \min \left[(A^T)^{\langle i \rangle} \right]$$

$$W = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Вибираємо максимальне значення

$$w := \max(W)$$

$$w = -1$$

Отже, за даним критерієм оптимальною є стратегія A_2 – продавати взимку.

4. Критерій песимізму-оптимізму Гурвиця

Задамо коефіцієнт песимізму

$$C := 0.4$$

Тоді

$$W_i := C \cdot \min \left[\left(a^T \right)^{\langle i \rangle} \right] + (1 - C) \cdot \max \left[\left(a^T \right)^{\langle i \rangle} \right]$$

$$W = \begin{pmatrix} 3 \\ 2.6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Вибираємо максимальне значення

$$w := \max(W)$$

$$w = 5$$

Отже, за даним критерієм оптимальною є стратегія A_3 – продавати весною.

5. Критерій Ходжа-Лемана

Задамо коефіцієнт достовірності інформації про стан попиту

$$u := 0.6$$

Тоді

$$W_i := u \cdot \sum_{j=1}^3 \left(a_{i,j} \cdot p_j \right) + (1 - u) \cdot \min \left[\left(a^T \right)^{\langle i \rangle} \right]$$

$$W = \begin{pmatrix} -0.6 \\ 1.7 \\ -0.28 \end{pmatrix}$$

Вибираємо максимальне значення

$$w := \max(W)$$

$$w = 1.7$$

Отже, за даним критерієм оптимальною є стратегія A_2 – продавати взимку.

6. Критерій мінімаксного ризику Севіджа

Знайдемо матрицю ризиків

$$j := 1..3$$

$$r_{i,j} := \max \left(A^{\langle j \rangle} \right) - A_{i,j}$$

$$r = \begin{pmatrix} 0 & 16 & 0 \\ 3 & 8 & 3 \\ 9 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$W_i := \max \left[\left(r^T \right)^{\langle i \rangle} \right]$$

$$W = \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Вибираємо мінімальне значення

$$w := \min(W)$$

$$w = 8$$

Отже, за даним критерієм оптимальною є стратегія A_2 – продавати взимку.

Висновки:

1) Стратегія A_1 (продавати відразу після збирання) не є оптимальною ні по одному із критеріїв.

2) Стратегія A_2 (продавати в зимові місяці) є оптимальною згідно критеріям недостатності підстави Лапласа, максимінного критерію Вальда та мінімаксного критерію Севіджа.

3) Стратегія A_3 (продавати у весняні місяці) є оптимальною згідно критеріям Байеса, песимізму-оптимізму Гурвіца та Ходжа-Лемана.

8.6. Задача про оптимізацію контролю за якістю продукції (кооперативна та некооперативна гра) [4, 19]

Нехай деяка продукція, яка виробляється підприємством-постачальником A (сировина для легкої промисловості, первинна продукція сільського господарства і т.п.), поставляється підприємству B для переробки і виготовлення готових виробів (одягу, взуття, продуктів харчування і т.п.). Кожне з підприємств зацікавлене в збільшенні своїх прибутків. У зв'язку з цим підприємство B контролює якість продукції підприємства A , а підприємство A не завжди зацікавлене в підвищенні її якості. При зменшенні частоти контролю збільшується безкарність постачальників продукції, які в погоні за кількісними показниками послаблюють увагу до якості продукції. При збільшенні частоти контролю якість продукції підприємства B покращується, але вартість контролю збільшується.

Необхідно визначити оптимальну частоту контролю за якістю продукції підприємства А підприємством В, а також оптимальну стратегію підприємства А для збільшення їхніх прибутків.

Розв'язання

Введемо умовні позначення:

$C_{Ая}$ і $S_{Ая}$ – відповідно ціна й собівартість якісної продукції підприємства А;

$C_{Аб}$ і $S_{Аб}$ – відповідна ціна й собівартість бракованої продукції підприємства А;

$C_{Вб}$ і $C_{Вя}$ – відповідно ціни бракованих і якісних виробів підприємства В;

$S_{В}$ – собівартість виготовлення виробів підприємством В;

$S_{к}$ – вартість контролю для підприємства В;

$C_{ш}$ – вартість штрафу, який сплачує державі підприємство А у разі виявленого браку.

Зобразимо графічно рух продукції від підприємства А до підприємства В (рис. 8.4).

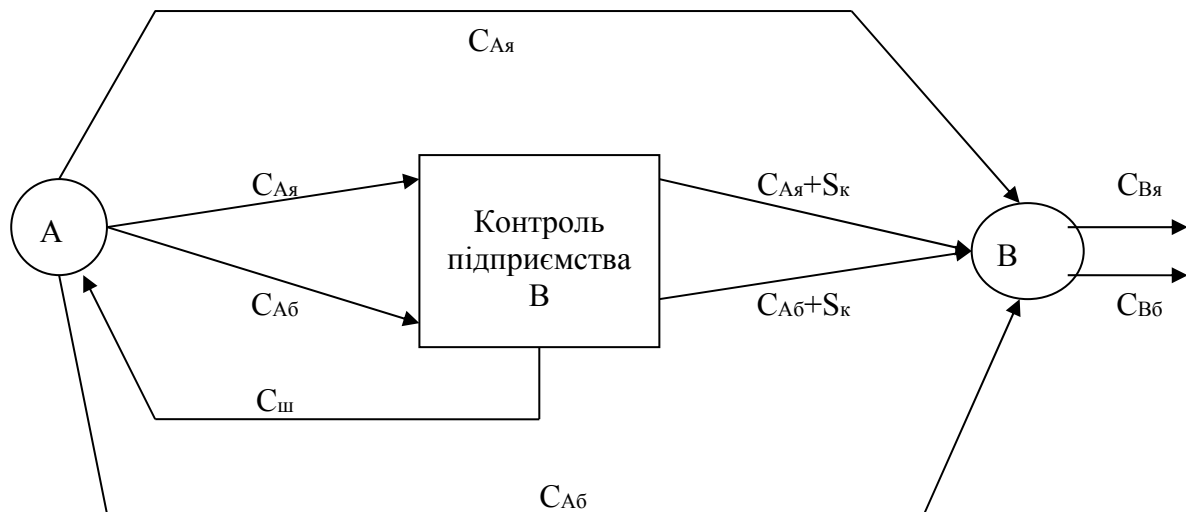


Рис. 8.4

Некооперативний випадок

Для розв'язку цієї задачі використаємо теорію некооперативних ігор. Позначимо через $y_я$ ймовірність вироблення якісної продукції підприємством А (стратегія A_1), а через $y_б$ – бракованої (стратегія A_2), при цьому $y_я + y_б = 1$. Через $x_к$ позначимо ймовірність контролю продукції підприємством В (стратегія B_1), а через $x_в$ – ймовірність відсутності контролю (стратегія B_2), $x_к + x_в = 1$. Складемо матриці виграшів (прибутків) для підприємств А і В відповідно (табл. 8.7 і 8.8).

Таблиця 8.7

A\B	$X_к$	$X_в$
$y_я$	$C_{Aя}-S_{Aя}$	$C_{Aя}-S_{Aя}$
$y_б$	$C_{Aб}-S_{Aб}-C_{ш}$	$C_{Aя}-S_{Aб}$

Таблиця 8.8

A\B	$X_к$	$X_в$
$y_я$	$C_{Bя}-C_{Aя}-S_к-S_в$	$C_{Bя}-C_{Aя}-S_в$
$y_б$	$C_{Bб}-C_{Aб}-S_к-S_в$	$C_{Bб}-C_{Aя}-S_в$

Тоді їхні середні прибутки (виграші) відповідно з формулами (8.15) будуть дорівнювати

$$S_A = (C_{Aя} - S_{Aя})y_яx_к + (C_{Aя} - S_{Aя})y_яx_в + (C_{Aб} - S_{Aб} - C_{ш})y_бx_к + (C_{Aя} - S_{Aб})y_бx_в;$$

$$S_B = (C_{Bя} - C_{Aя} - S_к - S_в)y_яx_к + (C_{Bя} - C_{Aя} - S_в)y_яx_в + (C_{Bб} - C_{Aб} - S_к - S_в)y_бx_к + (C_{Bб} - C_{Aя} - S_в)y_бx_в.$$

Використовуючи позначення

$$y_я = y, y_б = 1 - y, x_к = x, x_в = 1 - x,$$

отримуємо

$$S_A = y(C_{Aя} - S_{Aя}) + (1 - y)(x(C_{Aб} - C_{ш} - C_{Aя}) + C_{Aя} - S_{Aб}); \quad (8.18)$$

$$S_B = y(C_{Bя} - C_{Aя} - S_к - S_в) + (1 - y)(x(C_{Aя} - C_{Aб} - S_к) + C_{Bб} - C_{Aя} - S_в).$$

Ситуація рівноваги в цій задачі характеризується оптимальною парою (точкою) (y^*, x^*) – оптимальною частотою (ймовірністю) контролю x^* підприємства А підприємством В і оптимальною частотою (ймовірністю) y^* вироблення якісної продукції підприємством А, при якій стороні В не вигідно змінювати свою стратегію x^* , а стороні А – свою стратегію y^* , оскільки це призведе до зменшення їх середніх прибутків (виграшів). Звідси впливають умови рівноваги:

$$\begin{cases} \frac{\partial S_A}{\partial y_1} = C_{Aя} - S_{Aя} - [x(c_{Aб} - c_{ш} - c_{Aя}) + c_{Aя} - S_{Aб}] = 0 \\ \frac{\partial S_B}{\partial x_1} = -yS_K + (1-x)(c_{Aя} - c_{Aб} - S_K) = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь, отримуємо

$$\begin{aligned} y^* &= y_{я}^* = \frac{C_{Aя} - C_{Aб} - S_K}{C_{Aя} - C_{Aб}}; \\ y_{б}^* &= 1 - y_{я}^* = \frac{S_K}{C_{Aя} - C_{Aб}}; \\ x^* &= x_K^* = \frac{S_{Aя} - S_{Aб}}{C_{Aя} - C_{Aб} + C_{ш}}; \\ x_B^* &= 1 - x_K^* = \frac{S_{Aя} - S_{Aб}}{C_{Aя} - C_{Aб} + C_{ш}}. \end{aligned} \quad (8.19)$$

Звідси випливає, що для будь-якої відмінної від нуля вартості контролю S_K для підприємства В існує деяка оптимальна для підприємства А частка браку, яка дорівнює $y_{б}^*$. Щоб знизити критичну частоту контролю x_K^* підприємства В, необхідно збільшити величину штрафу $C_{ш}$. Підставляючи оптимальні значення y^* і x^* , обчислені за формулами (8.19), у співвідношення (8.18), отримуємо очікувані оптимальні прибутки (виграші) підприємств А і В:

$$\begin{aligned} S_A^* &= \frac{C_{Aя} - C_{Aб} - S_K}{C_{Aя} - C_{Aб}} (C_{Aя} - S_{Aя}) + \\ &+ \frac{S_K}{C_{Aя} - C_{Aб}} \cdot \left[\frac{S_{Aя} - S_{Aб}}{C_{Aя} - C_{Aб} + C_{ш}} (C_{Aб} - C_{ш} - C_{Aя}) + C_{Aя} - S_{Aб} \right]; \\ S_B^* &= \frac{C_{Aя} - C_{Aб} - S_K}{C_{Aя} - C_{Aб}} \left(C_{Bя} - C_{Aя} - S_B - S_K \cdot \frac{S_{Aя} - S_{Aб}}{C_{Aя} - C_{Aб} + C_{ш}} \right) + \\ &+ \frac{S_K}{C_{Aя} - C_{Aб}} \cdot \left[\frac{S_{Aя} - S_{Aб}}{C_{Aя} - C_{Aб} + C_{ш}} (C_{Aя} - C_{Aб} - S_K) + C_{Bб} - C_{Aя} - S_B \right]; \end{aligned}$$

після спрощень маємо

$$S_A^* = C_{Aя} - S_{Aя}; \quad S_B^* = C_{Bя} - C_{Aя} - S_B - \frac{C_{Bя} - C_{Bб}}{C_{Aя} - C_{Aб}} S_K. \quad (8.20)$$

Кооперативний випадок

Для розв'язку цієї задачі вище було застосовано теорію некооперативних ігор, тобто розглядалась ситуація, коли між підприємствами А і В немає ніяких домовленостей (співробітництва) стосовно збільшення власних прибутків – кожне підприємство діє на власний розсуд.

При цьому загальний прибуток при їх оптимальних стратегіях дорівнює

$$S_A^* + S_B^* = C_{Bя} - S_{Aя} - S_B - \frac{C_{Bя} - C_{Bб}}{C_{Aя} - C_{Aб}} S_K.$$

Нехай тепер між підприємствами А і В є домовленість щодо об'єднання своїх зусиль з метою збільшення загального прибутку. Зокрема, це може відповідати ситуації, коли підприємство В поглинає підприємство А. У цьому випадку в них є одна мета – збільшення загального прибутку – якій відповідає одна матриця виграшів (прибутків), що дорівнює сумі матриць виграшів окремо для підприємств А і В (табл. 8.7 і 8.8):

Таблиця 8.9

A\B	X_K	X_B
у _я	$C_{Bя} - S_{Aя} - S_K - S_B$	$C_{Bя} - S_{Aя} - S_B$
у _б	$C_{Bб} - S_{Aб} - S_K - S_B - C_{ш}$	$C_{Bб} - S_{Aб} - S_B$

Оскільки елементи другого стовпчика цієї матриці (табл. 8.9) більші за відповідні елементи першого стовпчика, то при довільних стратегіях підприємства А друга стратегія підприємства В, що характеризується відсутністю контролю над продукцією підприємства А ($x_K=0$; $x_B=1$), є

оптимальною для збільшення загального прибутку підприємства А і В, середня (очікувана) величина якого в цьому випадку дорівнює

$$\begin{aligned} S_{A+B} &= (C_{Bя} - S_{Aя} - S_B) y_я + (C_{Bб} - S_{Aб} - S_B) y_б = \\ &= (C_{Bя} - S_{Aя} - S_B)(1 - y_б) + (C_{Bб} - S_{Aб} - S_B) y_б. \end{aligned} \quad (8.21)$$

У зв'язку з тим, що прибуток від реалізації якісних виробів більший, ніж від бракованих

$$C_{Bя} - S_{Aя} - S_B > C_{Bб} - S_{Aб} - S_B,$$

і на відміну від першого випадку, коли підприємство А працює тільки на власний прибуток і йому вигідно виробляти частку браку $y_б^*$, з метою збільшення загального прибутку S_{A+B} воно прагне (зацікавлене) зменшити цю частку. Коли $y_б = 0$, загальний прибуток дорівнює

$$S_{A+B} = C_{Bя} - S_{Aя} - S_B.$$

Підрахуємо, на скільки більший загальний прибуток підприємств А і В, коли вони працюють разом, від загального прибутку, коли вони працюють окремо, кожне на свій результат (див. (8.20), (8.21)):

$$\begin{aligned} \Delta_{AB} &= S_{A+B} - (S_A^* + S_B^*) = (C_{Bя} - S_{Aя} - S_B)(1 - y_б) + \\ &+ (C_{Bб} - S_{Aб} - S_B) y_б - C_{Bя} + S_{Aя} + S_B + \frac{C_{Bя} - C_{Bб}}{C_{Aя} - C_{Aб}} S_K; \end{aligned}$$

після спрощень

$$\Delta_{AB} = - (C_{Bя} - C_{Bб} - S_{Aя} + S_{Aб}) y_б + \frac{C_{Bя} - C_{Bб}}{C_{Aя} - C_{Aб}} S_K. \quad (8.22)$$

Оскільки значення виразу, що стоїть в дужках, завжди додатне, різниця Δ_{AB} є лінійною спадаючою функцією відносно $y_б$ (частки бракованої продукції підприємства А). Тому максимальне значення різниці має вигляд

$$\Delta_{AB}^{(max)} = \frac{C_{Bя} - C_{Bб}}{C_{Aя} - C_{Aб}} S_K,$$

коли $y_б = 0$.

Нехай підприємство А, працюючи разом з підприємством В, виробляє ту саму частку браку y_6^* , коли воно працює самостійно. Підставляючи y_6^* , яке визначається співвідношеннями (8.19), у вираз (8.22), отримаємо

$$\Delta_{AB}^* = - (C_{B\bar{A}} - C_{B\bar{B}} - S_{A\bar{A}} + S_{A\bar{B}}) \frac{S_K}{C_{A\bar{A}} - C_{A\bar{B}}} + \frac{C_{B\bar{A}} - C_{B\bar{B}}}{C_{A\bar{A}} - C_{A\bar{B}}} S_K.$$

Після спрощень

$$\Delta_{AB}^* = \frac{S_{A\bar{A}} - S_{A\bar{B}}}{C_{A\bar{A}} - C_{A\bar{B}}} S_K,$$

яке, очевидно, менше, ніж $\Delta_{AB}^{(max)}$.

Врешті, можна розрахувати частку браку підприємства А, при якій $\Delta_{AB}=0$. Із співвідношення (8.22) отримуємо

$$y_6^0 = \frac{C_{B\bar{A}} - C_{B\bar{B}}}{(C_{A\bar{A}} - C_{A\bar{B}})(C_{B\bar{A}} - C_{B\bar{B}} - S_{A\bar{A}} - S_{A\bar{B}})} S_K, \quad (8.23)$$

тобто, якщо підприємство А працює разом з підприємством В з цією часткою браку, то загальний прибуток підприємств А і В не збільшується порівняно із загальним прибутком, коли вони працюють окремо, а частка браку підприємства А дорівнює y_6^* . Очевидно, що $y_6^0 > y_6^*$ (див. співвідношення (8.19), (8.23)).

Завдання для самостійної роботи

8.1. Знайти розв'язок гри, яка задається платіжною матрицею:

$$\begin{bmatrix} 3+n & 6+n \\ 7+n & 5+n \end{bmatrix},$$

де n – номер варіанту (остання цифра залікової книжки).

8.2. Дві компанії, що займаються виробництвом антивірусного програмного забезпечення, практично повністю ділять ринок певного регіону. Розробляючи нову версію програмного продукту для мобільних телефонів, кожна з компаній може використовувати один з чотирьох варіантів просування нового програмного продукту на ринок, який впливає на кінцеву вартість продукції.

У залежності від зробленого вибору компанії можуть встановити ціну реалізації одиниці продукції на рівні 25, 22, 19 та 16 умовних одиниць відповідно.

Відношення цін реалізації і собівартість представлені в таблиці

Варіант просування нового продукту	Ціна реалізації одиниці продукції, у. о.	Повна собівартість одиниці продукції, у. о.	
		Компанія <i>A</i>	Компанія <i>B</i>
1	25	17	21–0,1N
2	22	15	10+0,1N
3	19	10+0,1N	10
4	16	5+0,1N	5

N – номер варіанта по списку.

У результаті маркетингового дослідження ринку була визначена функція попиту на програмні продукти

$$Y = 20 - 0.5X,$$

де Y – кількість продукції, яка буде реалізована в регіоні (тис. од.), а X – середня ціна продукції компаній, у.о.

Значення часткою продукції, реалізованої компанією *A*, залежать від співвідношення цін на продукцію компанії *A* і компанії *B*. Маркетингове дослідження дозволило встановити цю залежність

Ціна реалізації 1 од. продукції, у. о.		Частка реалізованої продукції компанії <i>A</i>
Компанія <i>A</i>	Компанія <i>B</i>	
25	25	0,31
25	22	0,33
25	19	0,25
25	16	0,2
22	25	0,4
22	22	0,35
22	19	0,32
22	16	0,28
19	25	0,52
19	22	0,48
19	19	0,4
19	16	0,35
16	25	0,6
16	22	0,58
16	19	0,55
16	16	0,5

Необхідно дати відповідь на наступні питання.

1. Чи існує в даному завданні ситуація рівноваги при виборі варіанту просування продукту на ринок обома компаніями?

2. Чи існують варіанти, які компанії свідомо не будуть вибирати внаслідок не вигідності?

3. Скільки продукції буде реалізовано в ситуації рівноваги? Яка компанія отримає більший прибуток в ситуації рівноваги? Яка компанія буде мати більшу частку ринку в ситуації рівноваги? Дайте коротку економічну інтерпретацію результатів виконання завдання.

8.3. Матричну гру 2×2 вирішити в змішаних стратегіях:

1) аналітично (для гравця *A*); геометрично (для гравця *B*);

2) провести моделювання результатів гри за допомогою таблиці рівномірно розподілених випадкових чисел, розігравши 30 партій; визначити відносні частоти використання чистих стратегій кожним гравцем і середній виграш, порівнявши результати з отриманими теоретично в п.1.

Варіант 1 $\begin{pmatrix} 5 & 13 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$	Варіант 2 $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$	Варіант 3 $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 14 \end{pmatrix}$	Варіант 4 $\begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 18 & 7 \end{pmatrix}$	Варіант 5 $\begin{pmatrix} 13 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$
Варіант 6 $\begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 18 & 5 \end{pmatrix}$	Варіант 7 $\begin{pmatrix} 6 & 14 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$	Варіант 8 $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$	Варіант 9 $\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 6 & 15 \end{pmatrix}$	Варіант 10 $\begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 19 & 8 \end{pmatrix}$
Варіант 11 $\begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$	Варіант 12 $\begin{pmatrix} 7 & 11 \\ 19 & 6 \end{pmatrix}$	Варіант 13 $\begin{pmatrix} 7 & 15 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}$	Варіант 14 $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$	Варіант 15 $\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 7 & 16 \end{pmatrix}$
Варіант 16 $\begin{pmatrix} 5 & 13 \\ 20 & 9 \end{pmatrix}$	Варіант 17 $\begin{pmatrix} 15 & 7 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$	Варіант 18 $\begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 20 & 7 \end{pmatrix}$	Варіант 19 $\begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 11 & 7 \end{pmatrix}$	Варіант 20 $\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$
Варіант 21 $\begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 8 & 14 \end{pmatrix}$	Варіант 22 $\begin{pmatrix} 6 & 14 \\ 21 & 10 \end{pmatrix}$	Варіант 23 $\begin{pmatrix} 16 & 8 \\ 10 & 11 \end{pmatrix}$	Варіант 24 $\begin{pmatrix} 9 & 13 \\ 21 & 8 \end{pmatrix}$	Варіант 25 $\begin{pmatrix} 9 & 17 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}$
Варіант 26 $\begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$	Варіант 27 $\begin{pmatrix} 11 & 6 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}$	Варіант 28 $\begin{pmatrix} 7 & 15 \\ 22 & 11 \end{pmatrix}$	Варіант 29 $\begin{pmatrix} 17 & 9 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}$	Варіант 30 $\begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 22 & 9 \end{pmatrix}$

8.4. Дві галузі можуть здійснювати капітальні вкладення в 3 об'єкта. Стратегії галузей: i -та стратегія полягає у фінансуванні i -го об'єкта ($i = 1, 2, 3$). Враховуючи особливості вкладів і місцеві умови, прибутки першої галузі виражаються матрицею 3×3 .

Величина прибутку першою галуззю вважається такою ж величиною збитку для другої галузі – представлена гра може розглядатися як гра двох гравців з нульовою сумою.

Визначити оптимальні стратегії гравців та ціну гри. Платіжна матриця гри має вигляд

1.	$\begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ -2 & 3 & -3 \\ -5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$	11.	$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 4 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$	21.	$\begin{pmatrix} 3 & -4 & -5 \\ -7 & 2 & -6 \\ -4 & -1 & 7 \end{pmatrix}$
2.	$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	12.	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 5 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	22.	$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -7 \\ -3 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
3.	$\begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & -3 & 5 \end{pmatrix}$	13.	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 5 & 1 & -4 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$	23.	$\begin{pmatrix} -1 & 6 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$
4.	$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 5 \\ 3 & 3 & -2 \\ -4 & 5 & -5 \end{pmatrix}$	14.	$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & -3 \\ -2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$	24.	$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \\ -3 & 7 & -2 \end{pmatrix}$
5.	$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \\ 4 & -3 & 4 \end{pmatrix}$	15.	$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	25.	$\begin{pmatrix} -6 & 6 & 2 \\ 3 & -4 & 2 \\ -4 & -1 & 7 \end{pmatrix}$
6.	$\begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$	16.	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 3 & 3 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$	26.	$\begin{pmatrix} -5 & -5 & 7 \\ -2 & -1 & -5 \\ 6 & -5 & 3 \end{pmatrix}$
7.	$\begin{pmatrix} -4 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -5 & 2 & -2 \end{pmatrix}$	17.	$\begin{pmatrix} -2 & 5 & 4 \\ -4 & -1 & 6 \\ 5 & -3 & 5 \end{pmatrix}$	27.	$\begin{pmatrix} -5 & 1 & -5 \\ -4 & -4 & 7 \\ -1 & -5 & 1 \end{pmatrix}$
8.	$\begin{pmatrix} -3 & -5 & 1 \\ 4 & 0 & -3 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$	18.	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 2 & -2 & -5 \\ -4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$	28.	$\begin{pmatrix} 6 & 7 & -4 \\ -1 & -4 & 1 \\ 4 & -6 & 3 \end{pmatrix}$
9.	$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 3 & -4 & -1 \end{pmatrix}$	19.	$\begin{pmatrix} 0 & -4 & -1 \\ 1 & 3 & -4 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$	29.	$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 6 \\ -1 & 4 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$
10.	$\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$	20.	$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	30.	$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

8.5. Сільськогосподарське підприємство планує посадити деяку сільськогосподарську культуру двох сортів. Посівна площа 1000 га. Сорти відрізняються один від одного вимогами до вологості під час вегетаційного періоду. Після аналізу погодних умов виділено 4 стани погоди (S1, S2, S3, S4), що відрізняються режимом опадів і знайдено статистичні ймовірності кожного стану: $p_1=0.1$; $p_2=0.3$; $p_3=0.5$; $p_4=0.2$. Середня врожайність (ц/га) кожного сорту на всій ділянці для кожного стану погоди наведена в таблиці

	S1	S2	S3	S4
Сорт 1	23 + N	29 + N	31 + N	37 + N
Сорт 2	36 + N	33 + N	28 + N	24 + N

(N - номер варіанта; N = 1, ..., 30).

Можливі варіанти посіву:

- A1) сорт 1 посадити на 100% площі;
- A2) сорт 1 посадити на 75% площі, сорт 2 посадити на 25% площі;
- A3) сорт 1 посадити на 50% площі, сорт 2 посадити на 50% площі;
- A4) сорт 1 посадити на 25% площі, сорт 2 посадити на 75% площі;
- A5) сорт 2 посадити на 100% площі.

Визначити оптимальну стратегію за всіма критеріями (критерій Байєса, критерій Лапласа, максимінний критерій Вальда, критерій песимізму-оптимізму Гурвіца, критерій Ходжа-Лемана, критерій Мінімакс ризику Севіджа) коефіцієнт песимізму взяти рівним 0,4, коефіцієнт достовірності інформації про стани погоди прийняти рівним 0,7.

8.6. Профспілка робітників і службовців веде переговори з адміністрацією деякої організації про укладання контракту. Платіжна матриця, яка відображує інтереси сторін задана нижче в таблиці. Елементи матриці відображають середню зарплату робітників. Визначити оптимальні стратегії адміністрації та робітників, а також очікувану зарплату робітників, використовуючи ітераційний метод.

1.	$\begin{pmatrix} 75 & 105 & 65 \\ 70 & 60 & 80 \\ 80 & 90 & 45 \end{pmatrix}$	11.	$\begin{pmatrix} 75 & 105 & 65 \\ 70 & 65 & 80 \\ 95 & 90 & 41 \end{pmatrix}$	21.	$\begin{pmatrix} 86 & 91 & 117 \\ 36 & 74 & 54 \\ 96 & 66 & 73 \end{pmatrix}$
2.	$\begin{pmatrix} 35 & 115 & 65 \\ 60 & 50 & 60 \\ 75 & 90 & 45 \end{pmatrix}$	12.	$\begin{pmatrix} 35 & 115 & 25 \\ 32 & 50 & 60 \\ 75 & 97 & 85 \end{pmatrix}$	22.	$\begin{pmatrix} 63 & 112 & 92 \\ 60 & 110 & 78 \\ 42 & 111 & 35 \end{pmatrix}$
3.	$\begin{pmatrix} 66 & 105 & 65 \\ 35 & 90 & 60 \\ 75 & 90 & 35 \end{pmatrix}$	13.	$\begin{pmatrix} 36 & 105 & 65 \\ 35 & 90 & 60 \\ 75 & 90 & 25 \end{pmatrix}$	23.	$\begin{pmatrix} 85 & 112 & 35 \\ 61 & 105 & 64 \\ 99 & 115 & 35 \end{pmatrix}$
4.	$\begin{pmatrix} 60 & 112 & 79 \\ 30 & 105 & 54 \\ 50 & 95 & 35 \end{pmatrix}$	14.	$\begin{pmatrix} 60 & 112 & 79 \\ 30 & 105 & 54 \\ 50 & 95 & 35 \end{pmatrix}$	24.	$\begin{pmatrix} 88 & 93 & 74 \\ 41 & 51 & 36 \\ 114 & 72 & 19 \end{pmatrix}$
5.	$\begin{pmatrix} 103 & 33 & 44 \\ 55 & 106 & 84 \\ 103 & 55 & 101 \end{pmatrix}$	15.	$\begin{pmatrix} 103 & 33 & 44 \\ 55 & 106 & 84 \\ 103 & 55 & 101 \end{pmatrix}$	25.	$\begin{pmatrix} 111 & 42 & 88 \\ 36 & 67 & 61 \\ 52 & 73 & 35 \end{pmatrix}$
6.	$\begin{pmatrix} 86 & 91 & 117 \\ 36 & 74 & 54 \\ 96 & 66 & 73 \end{pmatrix}$	16.	$\begin{pmatrix} 75 & 105 & 65 \\ 70 & 60 & 80 \\ 80 & 90 & 45 \end{pmatrix}$	26.	$\begin{pmatrix} 75 & 105 & 65 \\ 70 & 60 & 80 \\ 80 & 90 & 45 \end{pmatrix}$
7.	$\begin{pmatrix} 63 & 112 & 92 \\ 60 & 110 & 78 \\ 42 & 111 & 35 \end{pmatrix}$	17.	$\begin{pmatrix} 35 & 115 & 65 \\ 60 & 50 & 60 \\ 75 & 90 & 45 \end{pmatrix}$	27.	$\begin{pmatrix} 35 & 115 & 65 \\ 60 & 50 & 60 \\ 75 & 90 & 45 \end{pmatrix}$
8.	$\begin{pmatrix} 85 & 112 & 35 \\ 61 & 105 & 64 \\ 99 & 115 & 35 \end{pmatrix}$	18.	$\begin{pmatrix} 66 & 105 & 65 \\ 35 & 90 & 60 \\ 75 & 90 & 35 \end{pmatrix}$	28.	$\begin{pmatrix} 66 & 105 & 65 \\ 35 & 90 & 60 \\ 75 & 20 & 35 \end{pmatrix}$
9.	$\begin{pmatrix} 88 & 93 & 74 \\ 41 & 61 & 36 \\ 114 & 82 & 19 \end{pmatrix}$	19.	$\begin{pmatrix} 60 & 112 & 79 \\ 30 & 105 & 54 \\ 50 & 95 & 35 \end{pmatrix}$	29.	$\begin{pmatrix} 60 & 112 & 79 \\ 30 & 105 & 54 \\ 50 & 95 & 35 \end{pmatrix}$
10.	$\begin{pmatrix} 111 & 42 & 88 \\ 36 & 67 & 61 \\ 52 & 73 & 35 \end{pmatrix}$	20.	$\begin{pmatrix} 103 & 33 & 44 \\ 55 & 106 & 84 \\ 103 & 55 & 101 \end{pmatrix}$	30.	$\begin{pmatrix} 83 & 33 & 44 \\ 55 & 106 & 84 \\ 103 & 55 & 91 \end{pmatrix}$

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ ДО ТЕМ 5-8

1. Який зміст мають функції попиту Торнквіста?
2. Як змінюється попит на предмети розкоші?
3. Як змінюється попит на малоцінні товари?
4. Як знайти межі доходного виробництва?
5. Що таке прибуток?
6. Як знайти максимальний прибуток?
7. Що означає відношення переваги?
8. Які властивості функції корисності?
9. Лінії байдужості.
10. Модель споживчого вибору.
11. Які необхідні умови розв'язку задачі споживчого вибору?
12. Що таке функція попиту?
13. В чому полягає неокласична задача споживання?
14. В чому полягає взаємозамінність споживчих благ?
15. Рівновага споживання.
16. Для чого застосовується модель Р.Стоуна?
17. Сформулюйте задачу максимізації об'єму випуску при обмеженнях витрат.
18. Сформулюйте задачу мінімізації витрат при фіксованому об'ємі випуску.
19. В чому полягає задача про визначення оптимального запасу продукції торговельних фірм?
20. Наведіть модель розміщення програмних модулів у багаторівневій пам'яті комп'ютера з метою мінімізації часу розв'язування.
21. Сформулюйте задачу про вибір оптимальної структури АСУ.
22. Послідовність розробки математичних імітаційних моделей.
23. Поясніть функціонування генератора випадкових чисел з рівномірним розподілом.

24. Моделювання повної групи несумісних подій.
25. Способи моделювання дискретної випадкової величини.
26. Способи моделювання випадкових величин з нормальним розподілом.
27. Моделювання випадкових величин з обмеженим нормальним розподілом.
28. Моделювання випадкових величин з довільним розподілом.
29. Дати означення імітаційного моделювання. Пояснити його сутність.
30. Використання ППП EXCEL для проведення імітаційних експериментів.
31. Основні поняття теорії ігор.
32. Які бувають типи ігор?
33. Дайте визначення матричної антагоністичної гри.
34. Чим відрізняється гра в чистих стратегіях від гри в змішаних стратегіях?
35. Що таке платіжна матриця?
36. Методи розв'язання задач теорії ігор.
37. Прямий розв'язок матричних ігор.
38. Графічний метод розв'язання задач теорії ігор.
39. Ітераційний метод розв'язання задач теорії ігор.
40. Статистичні ігри та побудова теоретико-ігрових моделей.

ПЕРЕЛІК ПИТАНЬ ДО ПІДСУМКОВОГО КОНТРОЛЮ

1. Модель Леонтьєва багатогалузевої економіки
2. Міжгалузевий баланс грошового обігу.
3. Модель експорту-імпорту.
4. Модель міжнародної торгівлі.
5. Що означає відношення переваги?
6. Які властивості функції корисності?
7. Які необхідні умови розв'язку задачі споживчого вибору?
8. Що таке функція попиту?
9. В чому полягає взаємозамінність споживчих благ?
10. Рівновага споживання.
11. Для чого застосовується модель Р.Стоуна?
12. В чому полягає неокласична задача споживання?
13. Рівняння Слуцького та його застосування.
14. Ефекти компенсації.
15. Що називається виробничою функцією?
16. Основні властивості виробничих функцій.
17. Що таке ізокванта? Який її економічний зміст?
18. Як визначається середня продуктивність капіталу?
19. Як визначається гранична продуктивність капіталу і продуктивності праці?
20. Який існує зв'язок між середньою і граничною продуктивністю капіталу (праці) в загальному випадку і у випадку виробничої функції Кобба-Дугласа?
21. Сформулюйте визначення часткової еластичності випуску і визначення еластичності виробництва?
22. Сформулюйте визначення граничної норми заміни одного ресурсу іншим.

23. Як змінюється гранична норма заміни одного ресурсу іншим при русі по ізокванті?
24. Дайте визначення і поясніть зміст виробничої функції в темповому записі.
25. Який зміст та які властивості виробничої функції CES?
26. Визначення основних понять оптимізаційних задач виробництва.
27. Основна мета функціонування підприємства (фірми).
28. В чому полягає відмінність в постановці задачі максимізації прибутку у випадках довгострокового та короткострокового періодах?
29. Визначення ізокошти.
30. Взаємне розміщення ізокошти та ізокванти в точці ринкової рівноваги.
31. Чому дорівнює норма заміни одного ресурсу іншим в точці ринкової рівноваги?
32. Що таке функція попиту на ресурси?
33. Що таке функція пропозиції випуску?
34. Сформулювати задачу максимізації об'єму випуску при обмеженнях витрат.
35. Сформулювати задачу мінімізації витрат при фіксованому об'ємі випуску.
36. Як визначається довгострокова лінія розширення виробництва?
37. Як визначається короткострокова лінія розширення виробництва?
38. В чому основна відмінність задач економічної статистики і динаміки?
39. Як перерахувати неперервні темпи приросту в дискретні і навпаки?
40. Поняття економічної рівноваги.
41. Павутиноподібна модель ринку.
42. Рівноважні ціни і об'єми випуску.
43. Модель Харрода-Домара.
44. Модель Солоу.
45. Золоте правило збереження.
46. Поясніть функціонування генератора випадкових чисел з рівномірним розподілом.

47. Моделювання повної групи несумісних подій.
48. Способи моделювання випадкових величин з нормальним розподілом.
49. Моделювання випадкових величин з обмеженим нормальним розподілом.
50. Моделювання випадкових величин з довільним розподілом.
51. Теоретичні засади статистичного Економіко-математичне моделювання.
52. Дати означення імітаційного моделювання. Пояснити його сутність.
53. Застосування електронних таблиць EXCEL для проведення імітаційних експериментів.
54. Чим відрізняються проблеми теорії ігор від проблем теорії оптимізації?
55. Які бувають типи ігор?
56. Визначення матричної антагоністичної гри.
57. Чим відрізняються ігри з ненульовою сумою від антагоністичних ігор?
58. Чим відрізняються кооперативні ігри від некооперативних?
59. Визначення рішення Неша для кооперативних ігор.
60. Як формулюється задача про олігополістичні ринки?

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Данилюк А. М., Харченко І. М. Математичні методи моделювання економічних процесів: Навчальний посібник. – К.: КНЕУ, 2016. – 352 с.
2. Іващенко В. І. Моделі міжгалузевого балансу: методологія, теорія, практика: монографія. – К.: КНЕУ, 2016. – 432 с.
3. Булига К.Б., Михайленко В.М. Комп'ютерний практикум із застосування математичних методів в економіці: Навч. посіб. – К.: Європейський ун-т фінансів, інформаційних систем, менеджменту і бізнесу, 2000. – 66 с.
4. Медведєв М.Г., Барановська Л.В. Ігрові методи Економіко-математичне моделювання: Навч. посібник.– К.: Вид-во Європ. ун-ту, 2001.– 116 с.
5. Вітлінський В.В. Моделювання економіки: Навч. посібник. – К.: КНЕУ, 2-ге видання, 2007. – 408 с.
6. Петренко А. І. Моделювання виробничих функцій: підручник. – К.: Центр учбової літератури, 2018. – 336 с.
7. Жалдак М.І., Триус Ю.В. Основи теорії і методів оптимізації: Навч. посіб. – Черкаси: Брама-Україна, 2005. – 608 с.
8. Слепенков О.В., Дементьєва І.В. Моделювання та прогнозування економічних процесів: Навчальний посібник. – К.: НТУУ "КПІ", 2015. – 272 с.
9. Чугай В.М., Шульга О.О., Дем'яненко В.Г. Економіко-математичне моделювання: Навчальний посібник. – К.: КНЕУ, 2018. – 352 с.
10. Кузмичов А.І., Медведєв М.Г. Математичне програмування в Excel: Навч. посіб. – К.: Вид-во Європ. ун-ту, 2005.– 320 с.
11. Іващенко В.І. Моделі міжгалузевого балансу: методологія, теорія, практика: монографія. – К.: КНЕУ, 2016. – 432 с.

12. Голик В.М., Луценко М.В. Математичне Економіко-математичне моделювання: Навчальний посібник. - К.: Видавничий дім "Ін Юре", 2022. –304 с.
13. Білецька О.І., Васильєва Н.М. Оптимізація розвитку промислових підприємств в умовах нестачі фінансових ресурсів. //Вісник Національного університету «Львівська політехніка», 2015. – Вип. 822. – С. 81-100.
14. Криворотенко Л.В., Рогальський В.І. Оптимізаційні моделі управління економікою на підприємствах. //Вісник Національного університету «Львівська політехніка». – 2016. – Вип. 849. – С. 182-188.
15. Мельник А.С., Кравченко О.А. Моделювання економічної динаміки з використанням ігрових методів //Вісник Житомирського державного технологічного університету – 2018. – Т. 4, № 4 (88). – С. 73-79.
16. Пасічник В.В. Імітаційне моделювання розвитку виробництва з використанням ігрових технологій. //Вісник Київського національного університету технологій та дизайну, 2015. – Вип. 6 (84). – С. 163-168.
17. Гетьман О.В., Лісова І М. Моделі виробничих функцій: навчальний посібник. – К.: Видавничий дім "Ін Юре", 2021. – 224 с.
18. Коваленко О.М. Моделювання економічних процесів: Навчальний посібник. – К.: КНЕУ, 2017. – 176 с.
19. Колодінська О.В., Медведєв М.Г. Дослідження операцій: навч. Посібник. – К.: Вид-во Європейського ун-ту, 2006. – 158 с.
20. Склярєнко О.В., Терещук Г.М. Моделювання економічних систем: навч. Посібник. – К.: Вид-во Європейського ун-ту, 2012. – 219 с.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	3
МОДЕЛІ МІЖГАЛУЗЕВОГО БАЛАНСУ, ВИРОБНИЧІ ФУНКЦІЇ ТА ЕКОНОМІЧНА ДИНАМІКА	4
1. Вступ. Економіко-математичні моделі, їх класифікація та етапи побудови.....	4
1.1. Поняття про економіко-математичні моделі	4
1.2. Класифікація та етапи побудови економіко-математичних моделей	6
2. Моделі міжгалузевого балансу	9
2.1. Основні елементи та аналіз міжгалузевих зв'язків. Модель міжгалузевого балансу Леонтьєва.....	9
2.2. Ціни в системі міжгалузевих зв'язків	14
2.3. Модель експорту та імпорту	16
2.4. Лінійна модель міжнародної торгівлі	17
Приклади розв'язання задач.....	19
Завдання для самостійної роботи	25
3. Виробничі функції.....	31
3.1. Основні характеристики та види виробничих функцій.....	31
3.2. Середні та граничні показники	42
3.3. Еластичність економічних функцій.....	43
Приклади розв'язання задач.....	45
Завдання для самостійної роботи	48
4. Економічна динаміка та її моделювання	51
4.1. Функції попиту та пропозиції	51
4.2. Показники економічної динаміки.....	52
4.3. Поняття динамічної рівноваги в економіці. Павутиноподібна модель ринку	54
Приклади розв'язання задач.....	58
Завдання для самостійної роботи	61
КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ ДО ТЕМ 1-4	63
ОПТИМІЗАЦІЙНІ ТА ІМІТАЦІЙНІ МОДЕЛІ, ІГРОВІ МЕТОДИ	65
5. Моделювання сфери попиту і споживання.....	65
5.1. Функції попиту Торнквіста	65
5.2. Функція корисності та її властивості. Лінії байдужості.....	67
5.3. Модель споживчого вибору	69
5.4. Модель Р. Стоуна	72
Приклади розв'язання задач.....	74
Завдання для самостійної роботи	75

6. Оптимізаційні моделі	78
6.1. Основні поняття оптимізації виробництва. Максимізація прибутку. Ізокости	78
6.2. Визначення оптимального запасу продукції торговельних фірм.....	81
6.3. Модель розміщення програмних модулів у багаторівневій пам'яті комп'ютера з метою мінімізації часу розв'язування	85
6.4. Задача про вибір оптимальної структури АСУ	92
Приклади розв'язання задач.....	87
Завдання для самостійної роботи	91
7. Алгоритмічні моделі в економіці та підприємстві	93
7.1. Основні аспекти імітаційного моделювання	93
7.2. Моделювання випадкових величин.....	96
7.3. Моделювання випадкових подій	98
7.4. Послідовність створення математичних імітаційних моделей.....	100
7.4.1. Побудова концептуальної моделі	100
7.4.2. Побудова алгоритму згідно з концептуальною моделлю системи.....	102
7.4.3. Створення комп'ютерної програми.....	102
7.4.4. Проведення машинних експериментів з моделлю системи.....	103
7.5. Приклади моделювання випадкових величин та подій при імітаційному моделюванні.....	104
7.5.1. Моделювання простої події.....	105
7.5.2. Моделювання повної групи несумісних подій.....	106
7.5.3. Моделювання дискретної випадкової величини	108
7.5.4. Моделювання випадкових величин з рівномірним розподілом	108
7.5.5. Моделювання випадкових величин з нормальним законом розподілу	109
Приклади розв'язання задач.....	111
7.1. Приклад імітаційного моделювання організації бізнесу	111
7.2. Приклад імітаційного моделювання роботи відділення банку по обслуговуванню фізичних осіб.....	121
Завдання для самостійної роботи	123
8. Теоретико-ігрові методи Економіко-математичне моделювання	124
8.1. Основні поняття теорії ігор	124
8.2. Аналітичний та графічний методи розв'язання матричних ігор	127
8.3. Методи розв'язання матричних ігор $m \times n$ ($m, n > 2$).....	131
8.3.1. Зведення задач теорії ігор до задач лінійного програмування	133
8.3.2. Ітераційний (наближений) метод розв'язання задач теорії ігор.....	137
8.3.3. Прямий розв'язок матричних ігор із застосуванням принципу домінування.....	141
8.4. Статистичні ігри та критерії прийняття рішень	145
8.5. Біматричні ігри з ненульовою сумою	151

8.5.1. Некооперативні ігри.....	152
8.5.2. Кооперативні ігри.....	157
Приклади розв'язання задач.....	162
Завдання для самостійної роботи	184
КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ ДО ТЕМ 5-8	190
ПЕРЕЛІК ПИТАНЬ ДО ПІДСУМКОВОГО КОНТРОЛЮ	192
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	195

Навчальний посібник

*Олена Вікторівна Скляренко
Ганна Михайлівна Терещук
Яніна Олексіївна Колодінська*

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Комп'ютерна верстка *Піддубенко Т.А.*

Дизайн обкладинки *Іванченко Н.М.*

Підписано до друку 22.01.2024. Формат 60х84¹/₁₆.
Папір офсетний. Гарнітура Times New Roman.
Ум. друк. арк. 12,55. Тираж 300.
Зам. № 5.

Друк: поліграфкомбінат Європейського університету.
03115, Україна, Київ-115, вул. Депутатська, 15/17.

Реєстраційне свідоцтво ДК №3833 від 14.07.2010 р.