

Приватний вищий навчальний заклад
«ЄВРОПЕЙСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

О.В. Складенко, Г.М. Терещук

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Навчальний посібник
для студентів ІТ-спеціальностей
закладів вищої освіти

Київ

Видавництво Європейського університету

2025

УДК – 51(072)
ББК 22.11
С 43

Рецензенти

А.О. Пашко – доктор фізико-математичних наук, професор
(Київський національний університет імені Тараса Шевченка),
М.Г. Медведєв – доктор технічних наук, професор
(Таврійський національний університет імені В.І. Вернадського)

*Рекомендовано до друку Вченою радою ПВНЗ «Європейський університет»
(протокол № 8 від 14.08.2025)*

СКЛЯРЕНКО О.В., ТЕРЕЩУК Г.М.

Вища математика. Навчальний посібник для студентів ІТ-спеціальностей
закладів вищої освіти / О.В. Скляренко, Г.М. Терещук. – К.: Вид-во
Європейського університету, 2025. – 141 с.

ISBN 978-966-301-271-1

Навчальний посібник містить структуру та програму вивчення освітньої компоненти «Вища математика» для студентів бакалаврату ІТ-спеціальностей, тематичний план, контрольні запитання до кожної теми, завдання для практичних занять та самостійної роботи студентів, приклади розв’язання типових завдань, питання до заліку та іспиту.

Навчальний посібник призначений для студентів закладів вищої освіти освітнього ступеня «Бакалавр», які навчаються за ІТ-спеціальностями, зокрема, «Комп’ютерні науки» та викладачів зазначеної дисципліни і суміжних з нею.

Публікується в авторській редакції.

УДК – 51(072)
ББК 22.11

ISBN 978-966-301-271-1

© О.В. Скляренко, Г.М. Терещук, 2025
© Європейський університет, 2025

ЗМІСТ

ВСТУП.....	5
СТРУКТУРА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ	7
ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ «ВИЩА МАТЕМАТИКА»	8
МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ САМОСТІЙНИХ РОБІТ	13
ТЕМА 1. МАТРИЦІ ТА ДІЇ З НИМИ	14
ТЕМА 2. ВИЗНАЧНИКИ КВАДРАТНИХ МАТРИЦЬ	17
ТЕМА 3. ОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ	20
ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ №1	26
ТЕМА 4. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА	30
ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ №2	33
ТЕМА 5. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ ТА У ПРОСТОРІ	35
ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ №3	39
ТЕМА 6. КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ	41
ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ №4	44
ТЕМА 7. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ	46
ТЕМА 8. ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ	50
ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ № 5	64
ТЕМА 10. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ	69
ТЕМА 11. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ	75
ТЕМА 13. ЧИСЛОВІ ТА ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ	91
ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ № 7	96

ТЕМА 14. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МНОЖИН ТА МАТЕМАТИЧНОЇ ЛОГІКИ.	101
ТЕМА 15. ОСНОВИ ТЕОРІЇ ГРАФІВ	106
ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ № 8.....	115
ПЕРЕЛІК ПИТАНЬ ДО ЗАЛІКУ	124
ПЕРЕЛІК ПИТАНЬ ДО ЕКЗАМЕНУ	127
ДОДАТКИ	130
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	138

ВСТУП

Вища математика є важливою складовою підготовки фахівців у галузі інформаційних технологій. Вона формує фундаментальні знання та навички, необхідні для розв'язання широкого спектра задач, що виникають у процесі розробки програмного забезпечення, моделювання складних систем, аналізу алгоритмів та обробки даних.

Дисципліна «Вища математика» охоплює ключові розділи математичної підготовки, які є базовими для спеціальності ФЗ «Комп'ютерні науки»: лінійна алгебра та аналітична геометрія, математичний аналіз, диференціальні рівняння, числові та функціональні ряди, елементи теорії множин, математична логіка та теорія графів. Вивчення цих розділів спрямоване на розвиток аналітичного та логічного мислення, що є необхідним для побудови ефективних математичних моделей, алгоритмів та вирішення практичних задач у сфері інформаційних технологій.

Предметом вивчення освітньої компоненти є поняття та методи вищої математики, властивості функціональних залежностей, які описують явища і процеси навколишнього світу, їх дослідження засобами лінійної і векторної алгебри, аналітичної геометрії, математичного аналізу, дискретної математики та математичної логіки для успішного розв'язування теоретичних і прикладних задач у галузі комп'ютерних наук, аналізу та інтерпретування.

Метою вивчення освітньої компоненти є ознайомлення студентів з основами математичного апарату, необхідного для розв'язування теоретичних та практичних задач фахової спрямованості; формування здатності до математичного формулювання та дослідження неперервних і дискретних математичних моделей, обґрунтування вибору методів і підходів для розв'язування теоретичних і прикладних задач у галузі комп'ютерних наук, аналізу та інтерпретування; використовувати сучасний математичний апарат неперервного та дискретного аналізу, лінійної алгебри, аналітичної геометрії, в професійній діяльності для розв'язання задач теоретичного та прикладного

характеру в процесі проектування та реалізації об'єктів інформатизації; розвинути навички аналітичного і логічного мислення та застосування математичного апарату до формалізації реальних процесів та явищ.

Практичні заняття відіграють важливу роль у засвоєнні навчального матеріалу, оскільки дозволяють студентам застосовувати теоретичні знання на практиці. Вони сприяють формуванню навичок розв'язання задач із використанням математичних методів, алгоритмів та структур даних.

Практикум розроблений для забезпечення ефективного засвоєння дисципліни. Він містить задачі різного рівня складності, що охоплюють основні розділи курсу, а також спрямовані на розвиток навичок математичного аналізу та логічного мислення. Під час підготовки до практичних занять студентам рекомендується:

- ознайомитися з теоретичними основами відповідної теми;
- підготувати відповіді на контрольні запитання;
- виконати запропоновані завдання самостійно або в групах на практичних заняттях;
- виконати завдання для самостійної роботи.

Даний навчальний посібник стане корисним інструментом для студентів, що прагнуть глибоко засвоїти матеріал дисципліни «Вища математика» та набути практичних навичок, необхідних у майбутній професійній діяльності.

Цей практикум допоможе студентам успішно опанувати курс вищої математики та сформувати міцну математичну базу для подальшої професійної діяльності.

СТРУКТУРА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Назва теми	Розподіл годин			
	УСЬОГО	Аудиторні		Самостійна робота
		Лекції	Практичні	
Тема 1. Матриці та дії з ними	14	2	2	10
Тема 2. Визначники квадратних матриць	14	2	2	10
Тема 3. Обернена матриця. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь	18	4	4	10
Тема 4. Векторна алгебра	14	2	2	10
Тема 5. Аналітична геометрія на площині та у просторі	16	4	2	10
Тема 6. Комплексні числа та їх застосування	14	2	2	10
Тема 7. Границя функції. Неперервність функції	14	2	2	10
Тема 8. Похідна та її застосування для дослідження функцій	18	4	4	10
Тема 9. Функції багатьох змінних	14	2	2	10
Тема 10. Невизначений інтеграл	14	2	4	8
Тема 11. Визначений інтеграл	12	2	2	8
Тема 12. Звичайні диференціальні рівняння	12	2	2	8
Тема 13. Числові та функціональні ряди	12	2	2	8
Тема 14. Елементи теорії множин та математичної логіки	12	2	2	8
Тема 15. Основи теорії графів	12	2	2	8
Всього	210	36	36	138

ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

Тема 1. Матриці та дії з ними. Матриця: основні означення, різновиди. Арифметичні операції (дії) над матрицями та їх властивості. Використання матричного числення для формування й аналізу таблиць вихідних даних при реалізації функцій інформаційних систем. Застосування матриць при розробці лінійних моделей реальних процесів. Використання сучасного математичного апарату лінійної алгебри в професійній діяльності для розв'язання задач теоретичного та прикладного характеру в процесі проектування та реалізації об'єктів інформатизації.

Тема 2. Визначники квадратних матриць. Поняття визначника 2-го, 3-го, n -го порядків. Мінор і алгебраїчне доповнення елемента визначника. Властивості визначників. Методи обчислення визначників. Використання визначників для обробки інформації при розв'язанні практичних завдань фахової спрямованості. Застосування прикладних комп'ютерних програм, зокрема, Mathcad, MS Excel та інструментів штучного інтелекту (ШІ) для вирішення практичних завдань методами лінійної алгебри.

Тема 3. Обернена матриця. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Обернена матриця: означення, теорема існування та способи відшукування. Матричні рівняння та їх розв'язання. Системи n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими (СЛАР). Правило Крамера для розв'язання СЛАР. Розв'язання СЛАР за допомогою оберненої матриці. Метод Гауса розв'язування СЛАР. Приклади застосування СЛАР в предметній області комп'ютерних наук. Використання інструментів ШІ для пошуку оптимальних методів розв'язання СЛАР.

Тема 4. Векторна алгебра. Вектори: означення основних понять (вектор, модуль вектора, нульовий (одичний) вектор, рівні (протилежні) вектори,

колінеарні (компланарні) вектори, координати. Форми задання векторів, проекція вектора на вісь (геометрична, алгебраїчна), орт вектора, напрямні косинуси. Лінійні операції над векторами. Лінійний векторний простір. Базис лінійного m -вимірного простору. Застосування інструментарію векторної алгебри для розв'язання завдань у сфері комп'ютерних наук.

Тема 5. Аналітична геометрія на площині та у просторі. Поняття про рівняння прямої на площині. Різновиди рівнянь прямої на площині: канонічне, параметричні, через дві задані точки, через задану точку у заданому напрямі, з кутовим коефіцієнтом, у відрізках на осях, нормальне, із заданим нормальним вектором, загальне. Основні задачі на пряму, взаємне розташування двох прямих на площині. Кут між двома прямими. Відстань від точки до прямої. Криві 2-го порядку: означення, загальне рівняння. Коло, еліпс, гіпербола, парабола. Аналітична геометрія у просторі. Пряма і площина у просторі. Поняття про рівняння поверхні у просторі. Різновиди рівнянь площини. Взаємне розміщення площин. Відстань від точки до площини. Рівняння прямої у просторі. Аналіз взаємного розташування прямих та прямої і площини у просторі. Загальне рівняння поверхні другого порядку. Найважливіші поверхні другого порядку. Дослідження форми поверхні другого порядку методом перерізів. Застосування інструментарію аналітичної геометрії під час розв'язання прикладних задач професійного спрямування.

Тема 6. Комплексні числа та їх застосування. Комплексні числа. Алгебраїчна, геометрична, тригонометрична і показникова форми запису комплексного числа. Спряжені числа. Дії над комплексними числами. Геометричне зображення комплексних чисел. Функції комплексної змінної. Застосування комплексних чисел у моделюванні та розв'язанні обчислювальних задач професійного спрямування.

Тема 7. Границя функції. Неперервність функції. Числові функції: основні означення, способи задання. Основні елементарні функції, їхні властивості та графіки. Границя числової послідовності. Нескінченно малі та нескінченно великі величини. Невизначеності: означення, типи. Границя функції. Перша і друга визначні границі та їх наслідки. Означення неперервності функції у точці, неперервність основних елементарних функцій. Розриви функцій та їх класифікація, дослідження функцій на неперервність. Застосування методу границь при моделюванні різноманітних залежностей між характеристиками складових об'єктів та систем.

Тема 8. Похідна та її застосування для дослідження функцій. Похідна функції: означення, загальний порядок відшукування, зв'язок із неперервністю. Таблиця похідних основних елементарних функцій та основні правила диференціювання. Диференціювання складних функцій і функцій різних форм задання. Геометричні, фізичні та економічні застосування похідної: рівняння дотичної та нормалі до кривої; швидкість, прискорення, собівартість продукції, продуктивність праці. Диференціал функції та його застосування до наближених обчислень. Похідні та диференціали вищих порядків. Застосування апарату похідних та диференціалів для вирішення професійно орієнтованих завдань.

Тема 9. Функції багатьох змінних. Означення функції декількох змінних. Область визначення функції двох незалежних змінних та її графічне зображення. Лінії та поверхні рівня. Частинні похідні функції декількох змінних, їх геометричний та економічний зміст. Частинні диференціали та повний диференціал функції двох змінних, його застосування до наближених обчислень значень функції. Частинні похідні та диференціали вищих порядків. Локальний екстремум функції двох змінних. Необхідні та достатні умови екстремуму. Використання диференціального числення функцій декількох змінних для моделювання процесів та явищ.

Тема 10. Невизначений інтеграл. Первісна функція. Невизначений інтеграл. Метод безпосереднього інтегрування. Метод інтегрування заміною змінної. Метод інтегрування частинами. Інтегрування найпростіших раціональних дробів. Інтегрування виразів, які містять квадратичний тричлен. Інтегрування довільного раціонального дробу. Інтегрування тригонометричних функцій за допомогою універсальної тригонометричної підстановки. Інтегрування найпростіших ірраціональних функцій. Використання методів інтегрального числення у прикладних задачах професійного спрямування.

Тема 11. Визначений інтеграл. Визначений інтеграл: означення, геометричний зміст, теорема існування, основні властивості. Теорема про середнє. Теорема Ньютона – Лейбніца. Основні методи визначеного інтегрування: безпосереднє інтегрування, метод заміни змінної (підстановки), інтегрування частинами. Геометричні застосування визначених інтегралів. Застосування комп'ютерних програм та інструментів ШІ для візуалізації графіків функцій, площі фігури та її знаходження чисельними методами інтегрування.

Тема 12. Звичайні диференціальні рівняння. Диференціальні рівняння 1-го порядку: означення основних понять (розв'язок, загальний і частинний розв'язки), теорема існування та єдиності розв'язку. Задача Коші: постановка та геометричний зміст. Інтегрування основних типів диференціальних рівнянь 1-го порядку. Застосування диференціальних рівнянь для моделювання складних процесів. Використання методів розв'язання звичайних диференціальних та інтегральних рівнянь та можливостей їх адаптації до інженерних задач.

Тема 13. Числові та функціональні ряди. Означення числового ряду, n -ї часткової суми, збіжного та розбіжного числового ряду. Властивості збіжних числових рядів. Гармонійний ряд. Необхідна умова збіжності числових рядів. Ряд геометричної прогресії. Достатні ознаки збіжності числових рядів з

додатними членами: ознака порівняння, ознака Д'аламбера, радикальна та інтегральна ознаки Коші. Знакозмінні ряди: означення, достатня ознака збіжності. Абсолютна та умовна збіжності. Знакопочергові ряди: означення, ознака Лейбніца. Поняття про функціональні ряди та їх збіжність. Степеневі ряди та їх застосування до наближених обчислень та адекватного моделювання предметних областей.

Тема 14. Елементи теорії множин та математичної логіки. Поняття множини, елемента множини, підмножини. Типи множин. Декартів добуток множин. Операції над множинами. Діаграми Венна. Впорядкованість множин. Бінарні відношення та їх властивості. Елементи математичної логіки. Логічні сполучники. Булеві функції. Логіка висловлювань. Застосування математичної логіки в завданнях алгоритмізації і створення програмних та інформаційних систем. Використання систем ШІ для моделювання операцій над множинами та перевірки логічних висловлювань.

Тема 15. Основи теорії графів. Поняття графа. Орієнтовані та неорієнтовані графи. Приклади застосування графів. Маршрути, ланцюги і цикли у графах. Типи графів. Задання графів. Частини графів і підграфи. Операції над графами. Зв'язність графів, компоненти зв'язності. Ейлерові графи. Гамільтонові графи. Дерева та їх властивості. Ліс. Задачі пошуку оптимальних маршрутів на графі. Аналіз алгоритмів розв'язання обчислювальних та логічних задач, оцінка ефективності алгоритмів на основі застосування формальних моделей алгоритмів на графах. Застосування комп'ютерних програм та інструментів ШІ для побудови графів та знаходження оптимальних шляхів.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ САМОСТІЙНИХ РОБІТ

Самостійну роботу потрібно виконувати дотримуючись таких правил:

1. Роботу виконують у рукописному або друкованому варіанті (у комп'ютерному варіанті шрифтом 14).
2. На обкладинці самостійної роботи повинні бути написані прізвище, ім'я, по батькові студента, номер академічної групи та номер по списку у академічному журналі групи.
3. В кожному завданні необхідно вибрати свій варіант. Номер варіанта індивідуальної роботи – це ваш номер по списку у журналі академічної групи. В роботі повинні бути завдання тільки свого варіанту. Роботи, що містять завдання іншого варіанту, не підлягають перевірці.
4. Перед розв'язанням завдання необхідно навести його умову. Якщо завдання має загальне формулювання, то при переписуванні його умови потрібно загальні дані замінити конкретними зі свого варіанту.
5. Розв'язання задач повинно супроводжуватися необхідними поясненнями та рисунками.

ТЕМА 1. МАТРИЦІ ТА ДІЇ З НИМИ

Практичне заняття

Мета: надати студентам міцне фундаментальне розуміння основ лінійної алгебри, зокрема теорії матриць та операцій над ними. Ознайомити студентів з поняттями матриці, транспонування, додавання та множення матриць. Розвинути навички виконання операцій з матрицями та застосування матричних методів для розв'язання прикладних задач.

Контрольні питання

1. Що таке матриця? Як позначаються матриці та їх елементи?
2. Що таке розмірність матриці? Які бувають типи матриць за розмірністю?
3. Які матриці називаються квадратними, діагональними, одиничними та нульовими?
4. Що таке транспонована матриця? Як її обчислити?
5. Які властивості має операція транспонування матриць?
6. Як виконується додавання та віднімання матриць? Які умови виконання цих операцій?
7. Що таке множення матриці на число? Які його властивості?
8. Як здійснюється множення матриць? Яка умова виконання цієї операції?
9. Які властивості має операція множення матриць? Чи є вона комутативною?
10. Що таке добуток матриці та вектора? У яких випадках ця операція можлива?

Задачі для розв'язання

1. Виконати дії над матрицями: $3A + 2B$; $A \cdot C$, $A \cdot B$, $B \cdot A$, де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2. Виконати нарахування заробітної плати, що приходить на кожне замовлення різних деталей, якщо відомі наступні дані:

а) кількість виробів (в штуках) у кожному замовленні

Замовлення	Кількість виробів		
	A	B	C
K	0	4	2
L	0	2	4
M	5	1	0

б) затрати робочої сили в годинах на кожному робочому місці та на кожний виріб

Виріб	Затрати на робочому місці				
	1	2	3	4	5
A	2	1	4	5	0
B	1	4	2	5	2
C	0	1	0	3	4

с) заробітна плата (в гривнях) за годину на кожному робочому місці

Робоче місце	Погодинна заробітна плата
1	1,25
2	1,50
3	1,40
4	1,40
5	1,25

Приклади розв'язання задач до теми 1

«Матриці та дії з ними»

1. Виконати дії з матрицями

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

а) $3A+2B$;

б) $A \cdot B$; $B \cdot A$;

с) $A \cdot C$.

Розв'язання.

а) Знайдемо $3A$ та $2B$

$$3A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 24 \\ 6 & 3 & 0 \\ 9 & 12 & 0 \end{pmatrix};$$

$$2B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 10 \\ 0 & 6 & 12 \\ 0 & 8 & 14 \end{pmatrix}.$$

$$3A + 2B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 24 \\ 6 & 3 & 0 \\ 9 & 12 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & 10 \\ 0 & 6 & 12 \\ 0 & 8 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 34 \\ 6 & 9 & 12 \\ 9 & 20 & 14 \end{pmatrix}.$$

b)

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1+0+0 & 2+0+32 & 5+0+56 \\ 2+0+0 & 4+3+0 & 10+6+0 \\ 3+0+0 & 6+12+0 & 15+24+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 34 & 61 \\ 2 & 7 & 16 \\ 3 & 18 & 39 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B \cdot A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1+4+15 & 0+2+20 & 8+0+0 \\ 0+6+18 & 0+3+24 & 0+0+0 \\ 0+8+21 & 0+4+28 & 0+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 22 & 8 \\ 24 & 27 & 0 \\ 29 & 32 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отже, $A \cdot B \neq B \cdot A$, тобто матриці А та В некомутативні.

$$\text{c) } A \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0+16 \\ 0+1+0 \\ 0+4+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

ТЕМА 2. ВИЗНАЧНИКИ КВАДРАТНИХ МАТРИЦЬ

Практичне заняття

Мета: забезпечити студентів глибоким розумінням властивостей визначників та їх використання для аналізу квадратних матриць. Ознайомити студентів з методами обчислення визначників та їх застосуванням у лінійній алгебрі. Розвинути вміння обчислювати визначники матриць різного порядку та використовувати їх у розв'язанні систем лінійних рівнянь.

Контрольні питання

1. Що таке визначник квадратної матриці?
2. Які властивості має визначник матриці?
3. Як обчислити визначник матриці 2×2 ?
4. Як обчислити визначник матриці 3×3 за правилом Саррюса?
5. Як впливає транспонування матриці на її визначник?
6. Що таке мінор та алгебраїчне доповнення елемента матриці?
7. Як знайти визначник матриці методом розкладу за рядком або стовпцем?
8. Що відбувається з визначником при перестановці рядків матриці?
9. Як змінюється визначник при множенні рядка матриці на число?
10. Що означає рівність визначника нулю?
11. Яке значення визначника одиничної матриці?

Задачі для розв'язання

1. Знайдіть мінори матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Обчислити визначники матриць:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Обчисліть визначник матриці методом зведення визначника до трикутного

$$\text{виду } A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 & 1 \\ -5 & -8 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Знайдіть ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

Приклади розв'язання задач до теми 2

«Визначники квадратних матриць»

1. Обчислити визначник матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Розв'язання.

1 спосіб. Обчислимо визначники за правилом Саррюса (правило трикутників).

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 8 -$$

$$-8 \cdot 1 \cdot 3 - 2 \cdot 0 \cdot 0 - 4 \cdot 0 \cdot 1 = 0 + 0 + 64 - 24 - 0 - 0 = 40.$$

2 спосіб. Обчислимо визначник за допомогою алгебраїчних доповнень.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 8 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 - 0 + 40 = 40.$$

3 спосіб. Обчислимо визначник методом зведення визначника до трикутного виду, для цього домножимо перший рядок на -2 та додамо до другого

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -16 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}.$$

Домножимо перший рядок на -3 та додамо до третього

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -16 \\ 0 & 4 & -24 \end{vmatrix}.$$

Помножимо другий рядок на - 4 та додамо до третього

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -16 \\ 0 & 0 & 40 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 40 = 40.$$

2. Обчислити ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Обчислимо визначник матриці A , розклавши її за елементами четвертого рядка

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \\ &= -0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 8 \end{vmatrix} = \\ &= 5 \cdot (24 + 0 + 0 - 24 - 0 - 0) = 0 \end{aligned}$$

Обчислимо тепер визначники розміром 3×3 , отримані з матриці A , викресленням одного рядка та одного стовпчика.

Викреслимо перший рядок та перший стовпчик. Отримаємо мінор

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 120 \neq 0.$$

Оскільки існує мінор третього порядку, який не дорівнює нулю, то ранг матриці $\text{rang} A = 3$.

ТЕМА 3. ОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

Практичне заняття

Мета: навчити студентів обчислювати обернену матрицю та застосовувати її до розв'язання систем лінійних рівнянь. Ознайомити студентів з поняттями оберненої матриці, її властивостями та методом обчислення за допомогою визначників та елементарних перетворень. Розвинути навички використання оберненої матриці, методу Крамера та методу Гауса для розв'язання систем лінійних рівнянь.

Контрольні питання

1. Що таке обернена матриця?
2. За яких умов існує обернена матриця?
3. Як обчислити обернену матрицю методом алгебраїчних доповнень?
4. Як перевірити правильність знайденої оберненої матриці?
5. Як знайти обернену матрицю методом Гауса?
6. Що таке система лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)?
7. Які методи розв'язання СЛАР існують?
8. Як розв'язати СЛАР методом Крамера?
9. Як розв'язати СЛАР за допомогою оберненої матриці?
10. Які переваги та недоліки методу Гауса?
11. Що означає сумісність та несумісність системи рівнянь?

Задачі для розв'язання

1. Знайти обернену до $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ матрицю.
2. Знайти обернену до $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ матрицю.
3. Розв'язати матричне рівняння $A \cdot X = B$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 9, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$$

- a) методом Крамера;
- b) матричним методом;
- c) методом Гауса.

Приклади розв'язання задач до теми 3

«Обернена матриця. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь»

1. Знайти матрицю A^{-1} , обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Розв'язання.

Для знаходження оберненої матриці використаємо формулу:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (A^*)^T,$$

де A^* – приєднана до A матриця, складена з алгебраїчних доповнень елементів матриці A , символ «Т» позначає операцію транспонування.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 40 \neq 0.$$

Отже, матриця A невироджена, тобто, вона має обернену.

Обчислимо алгебраїчні доповнення елементів матриці A :

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0, & A_{21} &= -\begin{vmatrix} 0 & 8 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 32, & A_{31} &= \begin{vmatrix} 0 & 8 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -8, \\ A_{12} &= -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0, & A_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -24, & A_{32} &= -\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 16, \\ A_{13} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5, & A_{23} &= -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -4, & A_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1. \end{aligned}$$

Тоді,

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 32 & -24 & -4 \\ -8 & 16 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$(A^*)^T = \begin{pmatrix} 0 & 32 & -8 \\ 0 & -24 & 16 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отримаємо обернену матрицю

$$A^{-1} = \frac{1}{40} \begin{pmatrix} 0 & 32 & -8 \\ 0 & -24 & 16 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4/5 & -1/5 \\ 0 & -3/5 & 2/5 \\ 1/8 & -1/10 & 1/40 \end{pmatrix}.$$

Впевнимся, що A^{-1} — обернена матриця до A . Якщо матриця A^{-1} знайдена вірно, то повинна виконуватись рівність $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$, де E — одинична матриця.

$$\begin{aligned} A \cdot A^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4/5 & -1/5 \\ 0 & -3/5 & 2/5 \\ 1/8 & -1/10 & 1/40 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0+0+1 & 4/5+0-4/5 & -1/5+0+1/5 \\ 0+0+0 & 8/5-3/5-0 & -2/5+2/5+0 \\ 0+0+0 & 12/5-12/5-0 & -3/5+8/5+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E. \end{aligned}$$

Таким чином, матриця $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 4/5 & -1/5 \\ 0 & -3/5 & 2/5 \\ 1/8 & -1/10 & 1/40 \end{pmatrix}$ є оберненою до

матриці A .

2. Розв'язати матричне рівняння $A \cdot X = B$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $B =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

Помножимо обидві частини рівняння $A \cdot X = B$ на A^{-1} зліва, тобто

$$A^{-1}AX = A^{-1}B, \quad \text{або} \quad X = A^{-1}B.$$

Таким чином, для розв'язку задачі необхідно побудувати матрицю A^{-1} , обернену до матриці A .

З попередньої задачі маємо

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 4/5 & -1/5 \\ 0 & -3/5 & 2/5 \\ 1/8 & -1/10 & 1/40 \end{pmatrix}.$$

Тоді розв'язком матричного рівняння буде матриця

$$\begin{aligned} X = A^{-1}B &= \begin{pmatrix} 0 & 4/5 & -1/5 \\ 0 & -3/5 & 2/5 \\ 1/8 & -1/10 & 1/40 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 12/5 - 4/5 & 24/5 - 7/5 \\ 0 & -9/5 + 8/5 & -18/5 + 14/5 \\ 1/8 & 2/8 - 3/10 + 1/10 & 5/8 - 6/10 + 7/40 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 8/5 & 17/5 \\ 0 & -1/5 & -4/5 \\ 1/8 & 1/20 & 1/5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 9; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -2; \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$$

a) за методом Крамера;

b) за методом Гауса;

c) матричним методом.

Розв'язання.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 13; \quad \Delta \neq 0$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 9 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 1 \\ 7 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -13;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 26;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & -2 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 39.$$

Тоді:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-13}{13} = -1;$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{26}{13} = 2;$$

$$x_3 = \frac{A_3}{A} = \frac{39}{13} = 3.$$

Складемо розширену матрицю системи та приведемо її до трикутної за допомогою елементарних перетворень.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 & 7 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 2 & 7 \end{array} \right).$$

Від другого рядка матриці віднімемо перший рядок помножений на 2, а від третього рядка віднімемо перший помножений на 3:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 1 & 13 \\ 0 & 8 & -1 & 13 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1/5 & 13/5 \\ 0 & 8 & -1 & 13 \end{array} \right).$$

Від третього рядка віднімемо другий помножений на 8:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1/5 & 13/5 \\ 0 & 0 & -13/5 & -39/5 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1/5 & 13/5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right).$$

Відповідно запишемо систему:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -2 \\ x_2 + \frac{1}{5}x_3 = \frac{13}{5} \\ x_3 = 3 \end{cases}.$$

З другого рівняння системи маємо

$$x_2 = \frac{13}{5} - \frac{1}{5}x_3 = \frac{13}{5} - \frac{1}{5} \cdot 3 = 2,$$

а з першого рівняння

$$x_1 = -2 + 2x_2 - x_3 = -2 + 4 - 3 = -1.$$

Отже, розв'язок системи

$$x_1 = -1;$$

$$x_2 = 2;$$

$$x_3 = 3.$$

Систему можна записати у матричному вигляді $A \cdot X = B$, де

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Тоді (якщо $\det A \neq 0$) розв'язок системи знаходимо за формулою

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Знайдемо матрицю A^{-1} , обернену до A .

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 13, \quad (A^*)^T = \begin{pmatrix} -6 & 4 & 7 \\ 1 & -5 & 1 \\ 8 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -6 & 4 & 7 \\ 1 & -5 & 1 \\ 8 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -6 & 4 & 7 \\ 1 & -5 & 1 \\ 8 & -1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -54 - 8 + 49 \\ 9 + 10 + 7 \\ 72 + 2 - 35 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -13 \\ 26 \\ 39 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

таким чином, розв'язок системи:

$$x_1 = -1;$$

$$x_2 = 2;$$

$$x_3 = 3.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ №1

Дані наведені в таблиці.

1. Виконати дії з матрицями: а) $3A+2B$; б) $A \cdot B$; $B \cdot A$; в) $A \cdot C$.
2. Обчислити визначник матриці A ($\det A$).
3. Знайти обернену до A матрицю A^{-1} .
4. Розв'язати матричне рівняння $AX=B$.
5. Розв'язати систему рівнянь
 - а) методом Крамера;
 - б) методом Гауса;
 - в) матричним методом.

№ вар.	A	B	C	
1.	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$	$x_1 + x_2 + x_3 = 4$ $x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2$ $7x_1 - 8x_2 + 3x_3 = 2$
2.	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$	$x_1 - 3x_2 + x_3 = 1$ $2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$ $5x_1 - 4x_2 + x_3 = 2$
3.	$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$	$5x_1 - 7x_2 = 1$ $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$ $4x_1 - x_2 + 3x_3 = 5$
4.	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$	$x_1 - 3x_3 = 2$ $x_1 + 2x_2 = 4$ $0,5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7$
5.	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$	$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$ $x_1 + x_2 - x_3 = 2$ $x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 0$

6.	$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$	$5x_1 - 3x_2 + x_3 = 2$ $x_1 - 8x_2 + 4x_3 = 11$ $3x_1 - 6x_2 = 2$
7.	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 1 & 11 & 7 \\ 7 & 5 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$	$x_1 - 2x_2 + x_3 = 4$ $2x_1 - x_2 + x_3 = 3$ $3x_1 - 4x_2 = 5$
8.	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$x_1 - x_2 + x_3 = 2$ $0,1x_1 - x_2 + 2x_3 = 3$ $2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0$
9.	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1$ $0,2x_1 - 4x_2 + x_3 = 2$ $5x_1 + 2x_3 = 1$
10.	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$	$x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1$ $0,1x_1 - 4x_2 + x_3 = 2$ $2x_1 + 3x_3 = 2,5$
11.	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$	$x_1 + x_2 + x_3 = 4$ $x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2$ $7x_1 - 8x_2 + 3x_3 = 2$
12.	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$	$x_1 - 3x_2 + x_3 = 1$ $2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$ $5x_1 - 4x_2 + x_3 = 2$
13.	$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$	$5x_1 - 7x_2 = 1$ $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$ $4x_1 - x_2 + 3x_3 = 5$
14.	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$	$x_1 - 3x_3 = 2$ $x_1 + 2x_2 = 4$ $0,5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7$

15.	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$	$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$ $x_1 + x_2 - x_3 = 2$ $x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 0$
16.	$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$	$5x_1 - 3x_2 + x_3 = 2$ $x_1 - 8x_2 + 4x_3 = 11$ $3x_1 - 6x_2 = 2$
17.	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 1 & 11 & 7 \\ 7 & 5 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$	$x_1 - 2x_2 + x_3 = 4$ $2x_1 - x_2 + x_3 = 3$ $3x_1 - 4x_2 = 5$
18.	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$	$x_1 - x_2 + x_3 = 2$ $0,1x_1 - x_2 + 2x_3 = 3$ $2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0$
19.	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$	$x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1$ $0,2x_1 - 4x_2 + x_3 = 2$ $5x_1 + 2x_3 = 1$
20.	$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$	$x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1$ $0,1x_1 - 4x_2 + x_3 = 2$ $2x_1 + 3x_3 = 2,5$
21.	$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$	$x_1 + x_2 + x_3 = 4$ $x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2$ $7x_1 - 8x_2 + 3x_3 = 2$
22.	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$	$x_1 - 3x_2 + x_3 = 1$ $2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$ $5x_1 - 4x_2 + x_3 = 2$
23.	$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$	$5x_1 - 7x_2 = 1$ $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$ $4x_1 - x_2 + 3x_3 = 5$

24.	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$	$x_1 - 3x_3 = 2$ $x_1 + 2x_2 = 4$ $0,5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7$
25.	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$	$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$ $x_1 + x_2 - x_3 = 2$ $x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 0$
26.	$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$	$5x_1 - 3x_2 + x_3 = 2$ $x_1 - 8x_2 + 4x_3 = 11$ $3x_1 - 6x_2 = 2$
27.	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 7 \\ 1 & 11 & 7 \\ 7 & 5 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$	$x_1 - 2x_2 + x_3 = 4$ $2x_1 - x_2 + x_3 = 3$ $3x_1 - 4x_2 = 5$
28.	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$	$x_1 - x_2 + x_3 = 2$ $0,1x_1 - x_2 + 2x_3 = 3$ $2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0$
29.	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1$ $0,2x_1 - 4x_2 + x_3 = 2$ $5x_1 + 2x_3 = 1$
30.	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$	$x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1$ $0,1x_1 - 4x_2 + x_3 = 2$ $2x_1 + 3x_3 = 2,5$

ТЕМА 4. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

Практичне заняття

Мета: забезпечити студентів знаннями про основи векторної алгебри та її застосування у розв'язанні прикладних задач. Ознайомити студентів з поняттями векторів, їх операціями (додавання, віднімання, множення на скаляр, скалярний та векторний добуток). Розвинути вміння виконувати операції з векторами та застосовувати їх у геометричних та фізичних задачах.

Контрольні питання

1. Що таке вектор та які його характеристики?
2. Як виконується додавання та віднімання векторів?
3. Що таке лінійна залежність та незалежність векторів?
4. Як обчислити скалярний добуток двох векторів?
5. Яке геометричне значення має скалярний добуток?
6. Як знайти кут між двома векторами?
7. Що таке векторний добуток та як його обчислити?
8. Яке геометричне значення має векторний добуток?
9. Що таке змішаний добуток трьох векторів?
10. Яке фізичне значення має змішаний добуток?
11. Як визначити проекцію вектора на інший вектор?
12. Що таке базис у векторному просторі?
13. Як розкласти вектор за базисом?

Задачі для розв'язання

1. Дано точки $A(-2; 5)$ та $B(4; -3)$. Знайти
 - a) координати вектора $\overline{AB}$;
 - b) модуль вектора $\overline{AB}$;
 - c) координати середини відрізка AB ;
 - d) координати точки C , яка поділяє відрізок AB у відношенні $AC:CB=2:3$.

2. Дано вектори $\vec{a}(1; -5; 2)$ та $\vec{b}(7; 4; -3)$. Знайти
- $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$;
 - $\vec{d} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$;
 - $|2\vec{a} - 5\vec{b}|$;
 - кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$.
3. Знайти площу паралелограма побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо
- $$\vec{A} = 3\vec{k} - 4\vec{m}; \vec{b} = 2\vec{k} + 3\vec{m}; |\vec{k}| = 5, |\vec{m}| = 2, \widehat{\vec{k}\vec{m}} = \frac{2\pi}{3}.$$
4. Розкласти вектор $\vec{b}(5; 15; 5)$ по системі векторів $\vec{a}_1(3; 2; 0), \vec{a}_2(4; 1; -1), \vec{a}_3(1; 2; 0)$.
5. Задано вершини піраміди $A(3, 2, 6), B(3, -2, -2), C(4, 3, 2), D(-5, 2, 1)$. Знайти
- довжину ребра AB ;
 - кут між ребрами AB та AC ;
 - площу грані ABC ;
 - об'єм піраміди $ABCD$;
 - проекцію вектора $\vec{AB}$ на $\vec{BC}$.

Приклади розв'язання задач до теми 4 **«Векторна алгебра»**

За допомогою векторної алгебри знайти:

- довжину ребра A_1A_2 , де $A_1(2, 4, 6), A_2(5, 4, 7)$;
- кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_3 , де $A_1(2, 4, 6), A_2(5, 4, 7), A_3(-4, 8, 7)$.

Розв'язання.

- Знайдемо координати вектора $\vec{A_1A_2}$:

$$\vec{A_1A_2}(5 - 2, 4 - 4, 7 - 6) = \vec{A_1A_2}(3, 0, 1).$$

Довжина ребра A_1A_2 дорівнює модулю вектора $\vec{A_1A_2}$.

Обчислимо його

$$|\vec{A_1A_2}| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{10}.$$

- Косинус кута між векторами обчислюємо за формулою:

$$\cos \phi = \frac{\overline{A_1 A_2} \cdot \overline{A_1 A_3}}{|\overline{A_1 A_2}| \cdot |\overline{A_1 A_3}|}.$$

Щоб скористатися формулою обчислимо скалярний добуток векторів $\overline{A_1 A_2}$, $\overline{A_1 A_3}$. Для цього знайдемо координати цих векторів.

$$\overline{A_1 A_3}(-4 - 2, 8 - 4, 7 - 6) = \overline{A_1 A_3}(-6, 4, 1).$$

З пункту 1 маємо $\overline{A_1 A_2}(3, 0, 1)$.

$$\text{Тоді } \overline{A_1 A_2} \cdot \overline{A_1 A_3} = 3 \cdot (-6) + 4 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = -17.$$

Знайдемо тема вектора $\overline{A_1 A_3}$:

$$|\overline{A_1 A_3}| = \sqrt{(-6)^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{53}.$$

Обчислюємо кут між ребрами $A_1 A_2$ та $A_1 A_3$:

$$\cos \phi = \frac{-17}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{53}} = -\frac{17}{\sqrt{530}} \approx -0,74,$$

тобто кут дорівнює

$$\phi = \arccos(-0,74) \approx 138^\circ.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ №2

За допомогою векторної алгебри знайти:

a) довжину ребра A_1A_2 ;

b) кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_3 .

- | | | |
|----------------------|-------------------|-------------------|
| 1. $A_1(1, 1, 1);$ | $A_2(7, 5, 6);$ | $A_3(0, -5, 4).$ |
| 2. $A_1(4, 2, 2);$ | $A_2(3, 0, 1);$ | $A_3(-1, 4, 2).$ |
| 3. $A_1(3, -5, 2);$ | $A_2(4, 5, 1);$ | $A_3(-3, 0, 4).$ |
| 4. $A_1(-2, 3, 5);$ | $A_2(1, -3, 4);$ | $A_3(7, 8, -1).$ |
| 5. $A_1(2, 4, -6);$ | $A_2(1, 3, 5);$ | $A_3(0, 2, 0).$ |
| 6. $A_1(4, 3, -1);$ | $A_2(5, 0, 4);$ | $A_3(2, 1, 2).$ |
| 7. $A_1(3, 4, -3);$ | $A_2(-5, 5, 0);$ | $A_3(2, 1, -4).$ |
| 8. $A_1(-2, 1, 7);$ | $A_2(3, -3, 18);$ | $A_3(5, 4, -1).$ |
| 9. $A_1(1, 0, 5);$ | $A_2(3, 2, 7);$ | $A_3(5, 0, 9).$ |
| 10. $A_1(2, 1, 0);$ | $A_2(4, 3, -3);$ | $A_3(-6, 5, 17).$ |
| 11. $A_1(0, 1, 1);$ | $A_2(7, 5, 6);$ | $A_3(0, -5, 4).$ |
| 12. $A_1(3, 2, 2);$ | $A_2(3, 0, 1);$ | $A_3(-1, 4, 2).$ |
| 13. $A_1(2, -5, 2);$ | $A_2(4, 5, 1);$ | $A_3(-3, 0, 4).$ |
| 14. $A_1(-1, 3, 5);$ | $A_2(1, -3, 4);$ | $A_3(7, 8, -1).$ |
| 15. $A_1(1, 4, -6);$ | $A_2(1, 3, 5);$ | $A_3(0, 2, 0).$ |
| 16. $A_1(3, 3, -1);$ | $A_2(5, 0, 4);$ | $A_3(2, 1, 2).$ |
| 17. $A_1(2, 4, -3);$ | $A_2(-5, 5, 0);$ | $A_3(2, 1, -4).$ |
| 18. $A_1(-1, 1, 7);$ | $A_2(3, -3, 18);$ | $A_3(5, 4, -1).$ |
| 19. $A_1(0, 0, 5);$ | $A_2(3, 2, 7);$ | $A_3(5, 0, 9).$ |
| 20. $A_1(1, 1, 0);$ | $A_2(4, 3, -3);$ | $A_3(-6, 5, 17).$ |
| 21. $A_1(0, 1, 1);$ | $A_2(7, 5, 6);$ | $A_3(0, -5, 4).$ |
| 22. $A_1(3, 2, 2);$ | $A_2(3, 0, 1);$ | $A_3(-1, 4, 2).$ |
| 23. $A_1(2, -5, 2);$ | $A_2(4, 5, 1);$ | $A_3(-3, 0, 4).$ |
| 24. $A_1(-3, 3, 5);$ | $A_2(1, -3, 4);$ | $A_3(7, 8, -1).$ |
| 25. $A_1(1, 4, -6);$ | $A_2(1, 3, 5);$ | $A_3(0, 2, 0).$ |

- | | | |
|----------------------|-------------------|-------------------|
| 26. $A_1(3, 3, -1);$ | $A_2(5, 0, 4);$ | $A_3(2, 1, 2).$ |
| 27. $A_1(2, 4, -3);$ | $A_2(-5, 5, 0);$ | $A_3(2, 1, -4).$ |
| 28. $A_1(-0, 1, 7);$ | $A_2(3, -3, 18);$ | $A_3(5, 4, -1).$ |
| 29. $A_1(0, 0, 5);$ | $A_2(3, 2, 7);$ | $A_3(5, 0, 9).$ |
| 30. $A_1(1, 1, 0);$ | $A_2(4, 3, -3);$ | $A_3(-6, 5, 17).$ |

ТЕМА 5. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ ТА У ПРОСТОРИ

Практичне заняття

Мета: навчити студентів основам аналітичної геометрії та їх застосуванню для аналізу просторових об'єктів. Ознайомити студентів з рівняннями прямих, площин. Розвинути вміння використовувати методи аналітичної геометрії для розв'язання практичних задач.

Контрольні питання

1. Що таке декартова система координат на площині та у просторі?
2. Як визначається відстань між двома точками на площині та у просторі?
3. Як знайти кут між двома прямими на площині?
4. Наведіть рівняння прямої, що проходить через дві задані точки.
5. Наведіть рівняння прямої із заданим кутовим коефіцієнтом.
6. Наведіть рівняння прямої у відрізках на осях координат.
7. Наведіть канонічне та параметричне рівняння прямої.
8. Що таке кутовий коефіцієнт прямої та яке його геометричне значення?
9. Як визначити взаємне розташування двох прямих на площині?
10. Що таке рівняння площини у просторі та які форми його запису?
11. Як знайти точку перетину прямої та площини?
12. Як визначити відстань від точки до площини?
13. Як визначити взаємне розташування прямої та площини у просторі?
14. Що таке нормальний вектор площини та як його знайти?
15. Як знайти кут між двома площинами?
16. Що таке крива другого порядку та які її види?

Задачі для розв'язання

1. Скласти рівняння площини, яка паралельна до осі OZ і проходить через точки $A(2; 3; -1)$ і $B(-1; 2; 1)$.
2. Знайти відстань від точки $A(2; 3; 1)$ до площини $7x - 6y - 6z + 42 = 0$.

3. Які відрізки на координатних осях відтинає площина

$$2x + 3y - 5z + 30 = 0?$$

4. Через точку $M(2; 3; -1)$ провести площину, паралельну площині

$$2x - 3y + 5z - 4 = 0.$$

5. Через точки $M(1; 2; 3)$ і $N(-2; -1; 3)$ провести площину, перпендикулярну площині $x + 4y - 2z + 5 = 0$.

6. Знайти кут між двома площинами

$$5x - 3y + 4z - 4 = 0,$$

$$3x - 4y - 2z + 5 = 0.$$

7. Скласти рівняння площини, що проходить через точки

$$A(1; 2; -1), B(-1; 0; 4), C(-2; -1; 1).$$

8. Знайти канонічне рівняння прямої, що задана загальним рівнянням

$$\begin{cases} x + 3y - 4z + 5 = 0, \\ 2x - y + z - 4 = 0. \end{cases}$$

9. Знайти кути, які пряма $\frac{x-5}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-4}{6}$ утворює з осями координат.

10. Знайти гострий кут між прямими

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z + 5 = 0, \\ x - y + z = 0; \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x - y + 2z - 4 = 0, \\ 2x + y - z - 5 = 0. \end{cases}$$

11. Через точку $A(1; -1; 2)$ провести пряму, яка паралельна прямій

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+1}{2}.$$

12. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точки $A(1; 2; -1)$ і $B(0; 3; -4)$.

Приклади розв'язання задач до теми 5

«Аналітична геометрія на площині та у просторі»

Вершини трикутника знаходяться в точках $A_1(2, 3)$, $A_2(5, 4)$, $A_3(9, 1)$.

Скласти:

а) рівняння прямої A_1A_2 ;

б) рівняння висоти та медіани цього трикутника, опущених з вершини A_2 ;

Розв'язання.

- а) Рівняння прямої A_1A_2 запишемо як рівняння прямої, що проходить через дві задані точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},$$

де $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, тобто

$$\frac{x - 2}{3} = \frac{y - 3}{1},$$

або $y = \frac{1}{3}x + 2\frac{1}{3}$ – рівняння прямої A_1A_2 .

- б) Запишемо рівняння прямої A_1A_3 як рівняння прямої, що проходить через дві задані точки:

$$\frac{x - 2}{7} = \frac{y - 3}{-2},$$

або $y = -\frac{2}{7}x + 3\frac{4}{7}$ – рівняння прямої A_1A_3 .

Для знаходження рівняння висоти A_2D трикутника використаємо умову перпендикулярності прямих

$k_1 = -\frac{1}{k_2}$, де k_1 та k_2 – кутові коефіцієнти висоти A_2D та прямої A_1A_3 відповідно.

Оскільки кутовий коефіцієнт прямої A_1A_3 – $k_2 = -\frac{2}{7}$, то кутовий коефіцієнт висоти $k_1 = \frac{7}{2} = 3,5$.

Тепер можемо записати рівняння висоти A_2D як рівняння прямої з заданим кутовим коефіцієнтом:

$$y = k_1x + b, \text{ тобто } y = 3,5x + b.$$

Оскільки точка A_2 належить висоті A_2D , її координати повинні задовольняти рівняння висоти, тобто

$$4 = 3,5 \cdot 5 + b, \text{ або } b = -13,5.$$

Отже, рівняння висоти A_2D має вигляд

$$y = 3,5x - 13,5.$$

Для знаходження рівняння медіани A_2C знайдемо координати основи медіани – точки C , яка ділить відрізок A_1A_3 навпіл.

Координати середини відрізка знаходимо за формулами:

$$x_c = \frac{x_1 + x_2}{2},$$

$$y_c = \frac{y_1 + y_2}{2},$$

тобто координати точки C

$$x_c = \frac{11}{2} = 5,5$$

$$y_c = 2,$$

$$C(5,5; 2).$$

Запишемо рівняння медіани A_2C як прямої, що проходить через дві задані точки A_2 та C :

$$\frac{x - 5}{0,5} = \frac{y - 4}{-2},$$

або $y = -4x + 24$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ №3

Вершини трикутника знаходяться в точках $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$.

Скласти:

a) рівняння прямої A_1A_2 ;

b) рівняння висоти та медіани цього трикутника, опущеної з вершини A_2 .

- | | | |
|--------------------|-----------------|----------------|
| 1. $A_1(1, 1)$; | $A_2(5, 6)$; | $A_3(2, 3)$. |
| 2. $A_1(5, 2)$; | $A_2(0, 1)$; | $A_3(4, 3)$. |
| 3. $A_1(-5, 2)$; | $A_2(5, 1)$; | $A_3(0, 4)$. |
| 4. $A_1(3, 5)$; | $A_2(-3, 4)$; | $A_3(8, -1)$. |
| 5. $A_1(4, -6)$; | $A_2(3, 5)$; | $A_3(2, 0)$. |
| 6. $A_1(3, -1)$; | $A_2(0, 4)$; | $A_3(1, 2)$. |
| 7. $A_1(4, -3)$; | $A_2(5, 0)$; | $A_3(1, -4)$. |
| 8. $A_1(1, 7)$; | $A_2(-3, 18)$; | $A_3(4, -1)$. |
| 9. $A_1(0, 5)$; | $A_2(2, 7)$; | $A_3(0, 9)$. |
| 10. $A_1(2, 1)$; | $A_2(4, 3)$; | $A_3(-6, 5)$. |
| 11. $A_1(2, 1)$; | $A_2(5, 6)$; | $A_3(2, 3)$. |
| 12. $A_1(4, 2)$; | $A_2(0, 1)$; | $A_3(4, 3)$. |
| 13. $A_1(-4, 2)$; | $A_2(5, 1)$; | $A_3(0, 4)$. |
| 14. $A_1(2, 5)$; | $A_2(-3, 4)$; | $A_3(8, -1)$. |
| 15. $A_1(3, -6)$; | $A_2(3, 5)$; | $A_3(2, 0)$. |
| 16. $A_1(2, -1)$; | $A_2(0, 4)$; | $A_3(1, 2)$. |
| 17. $A_1(3, -3)$; | $A_2(5, 0)$; | $A_3(1, -4)$. |
| 18. $A_1(0, 7)$; | $A_2(-3, 18)$; | $A_3(4, -1)$. |
| 19. $A_1(1, 5)$; | $A_2(2, 7)$; | $A_3(0, 9)$. |
| 20. $A_1(1, 1)$; | $A_2(4, 3)$; | $A_3(-6, 5)$. |
| 21. $A_1(2, 1)$; | $A_2(5, 6)$; | $A_3(2, 3)$. |
| 22. $A_1(4, 2)$; | $A_2(0, 1)$; | $A_3(4, 3)$. |
| 23. $A_1(-4, 2)$; | $A_2(5, 1)$; | $A_3(0, 4)$. |

- | | | | |
|-----|---------------|----------------|---------------|
| 24. | $A_1(2, 5);$ | $A_2(-3, 4);$ | $A_3(8, -1).$ |
| 25. | $A_1(3, -6);$ | $A_2(3, 5);$ | $A_3(2, 0).$ |
| 26. | $A_1(2, -1);$ | $A_2(0, 4);$ | $A_3(1, 2).$ |
| 27. | $A_1(3, -3);$ | $A_2(5, 0);$ | $A_3(1, -4).$ |
| 28. | $A_1(0, 7);$ | $A_2(-3, 18);$ | $A_3(4, -1).$ |
| 29. | $A_1(1, 5);$ | $A_2(2, 7);$ | $A_3(0, 9).$ |
| 30. | $A_1(1, 1);$ | $A_2(4, 3);$ | $A_3(-6, 5).$ |

ТЕМА 6. КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Практичне заняття

Мета: надати студентам базові знання про комплексні числа та їх застосування у різних галузях науки та техніки. Ознайомити студентів з арифметичними операціями над комплексними числами, їх алгебраїчною та тригонометричною формами. Розвинути навички роботи з комплексними числами та застосування їх у математичному аналізі та електротехніці.

Контрольні питання

1. Що таке комплексне число та як воно записується?
2. Які форми подання комплексного числа ви знаєте?
3. Як виконуються арифметичні дії з комплексними числами?
4. Що таке спряжене комплексне число та яке його значення?
5. Як обчислити модуль та аргумент комплексного числа?
6. Як подати комплексне число у тригонометричній формі?
7. Що таке формула Муавра та де вона застосовується?
8. Як піднести комплексне число до степеню?
9. Що таке показникова форма комплексного числа?
10. Як виконати ділення комплексних чисел у тригонометричній формі?

Задачі для розв'язання

1. Спростити вирази
 - a) $\frac{1+i}{1-2i} - \left(\frac{4}{5} - \frac{2}{5}i\right)^2$;
 - b) $\frac{(1-3i)(1+3i)}{-3+i} - 2i^8$;
 - c) $\frac{2(1-i\sqrt{3})}{(\sqrt{3}-i)} + (4-2i)^2$.
2. Подати число $z = -3 + 4i$ в геометричній, тригонометричній та показниковій формі запису комплексного числа.
3. Знайти $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, z_1^2 , $\sqrt{z_2}$, якщо $z_1 = 5 - 7i$, $z_2 = 4 + 3i$.

4. Виконати дії в тригонометричній формі. Результати записати в алгебраїчній та показниковій формах. Зобразити на комплексній площині шукане комплексне число

a) $(4(\cos 220^\circ + i \sin 220^\circ)) \cdot (1,5(\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ));$

b) $(3(\cos 280^\circ + i \sin 280^\circ)) : \left(\frac{3}{4}(\cos 70^\circ + i \sin 70^\circ)\right);$

c) $\left(\cos \frac{\pi}{24} + i \sin \frac{\pi}{24}\right)^6.$

5. Виконати дії. Результат записати в алгебраїчній формі

a) $6e^{2\pi i} \cdot 3e^{\frac{\pi}{3}i};$

b) $2e^{\frac{4\pi}{3}i} : 4e^{\frac{2\pi}{3}i};$

c) $(-4 + 4i) \cdot 3e^{-i\frac{\pi}{6}}.$

11. Розв'язати квадратне рівняння $x^2 + 4x + 5 = 0$.

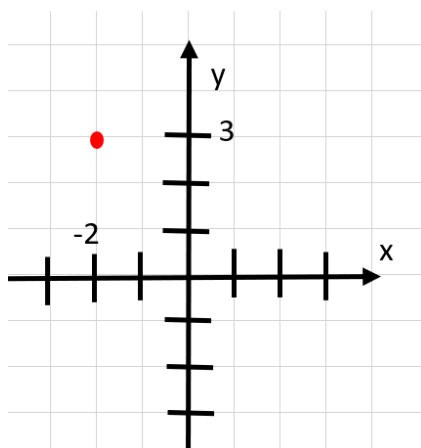
Приклади розв'язання задач до теми 6

«Комплексні числа та їх застосування»

Задано комплексні числа $z_1 = -2 + 3i$ та $z_2 = 5 + 12i$. Зобразити на комплексній площині число z_1 . Знайти $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, z_1^2 , $\sqrt{z_2}$.

Розв'язання.

Для того, щоб зобразити комплексне число $z_1 = -2 + 3i$ на комплексній площині потрібно побудувати прямокутну систему координат, вибрати одиницю довжини та відкласти дійсну частину на осі абсцис, а уявну – на осі ординат.



$$z_1 + z_2 = -2 + 3i + 5 + 12i = (-2 + 5) + (3 + 12)i = 3 + 15i.$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (-2 + 3i) \cdot (5 + 12i) = -2 \cdot 5 - 2 \cdot 12i + 3i \cdot 5 + 3i \cdot 12i = \\ &= -10 - 24i + 15i + 36i^2 = -10 + 9i - 36 = -46 + 9i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{-2 + 3i}{5 + 12i} = \frac{(-2 + 3i) \cdot (5 - 12i)}{(5 + 12i) \cdot (5 - 12i)} = \frac{-10 + 24i + 15i + 36}{25 + 144} = \\ &= \frac{26 + 39i}{169} = \frac{26}{169} + \frac{39}{169}i. \end{aligned}$$

$$z_1^2 = (-2 + 3i)^2 = 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3i + (3i)^2 = 4 - 12i - 9 = -13 - 12i$$

$$\begin{aligned} \sqrt{z_2} &= \sqrt{5 + 12i} = \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5^2 + 12^2} + 5}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{5^2 + 12^2} - 5}{2}} \right) = \\ &= \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{25 + 144} + 5}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{25 + 144} - 5}{2}} \right) = \\ &= \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5^2 + 12^2} + 5}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{5^2 + 12^2} - 5}{2}} \right) = \\ &= \pm \left(\sqrt{\frac{13+5}{2}} + i \sqrt{\frac{13-5}{2}} \right) = \pm \left(\sqrt{\frac{18}{2}} + i \sqrt{\frac{8}{2}} \right) = \pm (\sqrt{9} + i\sqrt{4}) = \pm (3 + 2i). \end{aligned}$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ №4

Дані наведені в таблиці.

Зобразити на комплексній площині число z_1 . Знайти

a) $z_1 + z_2$;

b) $z_1 \cdot z_2$;

c) $\frac{z_1}{z_2}$;

d) z_1^2 ;

e) $\sqrt{z_2}$.

1.	$z_1 = 4 - 5i$;	$z_2 = 1 + 9i$.
2.	$z_1 = 3 + 2i$;	$z_2 = 4 - 7i$.
3.	$z_1 = 1 - 5i$;	$z_2 = 2 + 7i$.
4.	$z_1 = 6 + 3i$;	$z_2 = 9 - i$.
5.	$z_1 = 7 - 2i$;	$z_2 = 1 + 3i$.
6.	$z_1 = 6 + 5i$;	$z_2 = 5 - 2i$.
7.	$z_1 = 1 - 7i$;	$z_2 = 5 + 4i$.
8.	$z_1 = 2 + 7i$;	$z_2 = 9 - 2i$.
9.	$z_1 = 3 - 5i$;	$z_2 = 9 + i$.
10.	$z_1 = 6 + 2i$;	$z_2 = 8 - i$.
11.	$z_1 = 1 - 9i$;	$z_2 = 6 + 2i$.
12.	$z_1 = 1 + 8i$;	$z_2 = 7 - 3i$.
13.	$z_1 = 4 - 7i$;	$z_2 = 8 + i$.
14.	$z_1 = 5 + 3i$;	$z_2 = 6 - 2i$.
15.	$z_1 = 5 - 2i$;	$z_2 = 7 + 3i$.
16.	$z_1 = 4 + 6i$;	$z_2 = 9 - i$.
17.	$z_1 = 3 - 7i$;	$z_2 = 5 + 6i$.
18.	$z_1 = 3 + 5i$;	$z_2 = 4 - 9i$.
19.	$z_1 = 2 - 7i$;	$z_2 = 6 + 3i$.
20.	$z_1 = 2 + 5i$;	$z_2 = 5 - 3i$.

21.	$z_1 = 4 - 7i;$	$z_2 = 8 + 3i.$
22.	$z_1 = 5 + 2i;$	$z_2 = 7 - 3i.$
23.	$z_1 = 3 - 8i;$	$z_2 = 7 + 2i.$
24.	$z_1 = 8 + 2i;$	$z_2 = 3 - 7i.$
25.	$z_1 = 1 - 8i;$	$z_2 = 7 + 4i.$
26.	$z_1 = 7 + i;$	$z_2 = 8 - 2i.$
27.	$z_1 = 5 - i;$	$z_2 = 9 + i.$
28.	$z_1 = 4 + 7i;$	$z_2 = 9 - 3i.$
29.	$z_1 = 3 - 9i;$	$z_2 = 5 + 2i.$
30.	$z_1 = 1 + 9i;$	$z_2 = 5 - 7i.$

ТЕМА 7. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ

Практичне заняття

Мета: забезпечити студентів знаннями про основні поняття границі та неперервності функції. Ознайомити студентів з визначенням границі функції, її властивостями та застосуванням у дослідженні асимптот функцій. Розвинути навички обчислення границь та аналізу неперервності функцій.

Контрольні питання

1. Що таке границя функції в точці?
2. Які основні властивості границь функції?
3. Дайте визначення нескінченно малих та нескінченно великих функцій.
4. Які основні методи обчислення границь ви знаєте?
5. Що таке невизначеність та які види невизначеності ви знаєте?
6. Які границі називають першою та другою чудовими границями?
7. Наведіть ряд еквівалентностей функцій
8. Що таке неперервність функції у точці та на проміжку?
9. Які види розривів функції існують?
10. Як перевірити функцію на неперервність?

Задачі для розв'язання

1. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{5x+2}{2x+3}$.
2. Знайти границі функцій, розкривши невизначеності типу $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$:
a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+5}{2x+7}$; b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3-2x^2+2}{x^5-4x-8}$; c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^6+2}{x^5-4x}$.
3. Знайти границі функцій, розкривши невизначеності типу $\left[\frac{0}{0}\right]$:
a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x^2-3x}$; b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$; c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-8}{x^2-5x+6}$.
4. Знайти границі функцій, позбувшись ірраціональностей:
a) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}$; b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{\sqrt[3]{x}-1}$.

5. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x})$.

6. Обчислити границі функцій, застосовуючи першу чудову границю:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{x}$;

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 7x}$;

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{x^2}$.

7. Обчислити границі функцій, застосовуючи другу чудову границю:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x$;

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$;

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+2x-4}{x^2+3x-2}\right)^x$

Приклади розв'язання задач до теми 7
«Границя функції. Неперервність функції»

Знайти:

a) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 2x - 8}{x - 4}$;

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4 + 8x}{x^4 + 3}$;

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 5x + 4}{\sqrt{x+3} - \sqrt{5-x}}$;

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 4x}$;

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{3x-4}\right)^{5x-1}$.

Розв'язання.

a) Границя чисельника та знаменника дорівнює нулю, тобто маємо невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$.

$$\lim_{x \rightarrow 4} (x - 4) = \lim_{x \rightarrow 4} x - \lim_{x \rightarrow 4} 4 = 4 - 4 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} (x^2 - 2x - 8) = \lim_{x \rightarrow 4} x^2 - 2 \lim_{x \rightarrow 4} x - 8 = 16 - 8 - 8 = 0$$

Отже, теорему про границю частки застосувати не можна. Але поблизу точки $x_0 = 4$ ($x \neq 4$) $x - 4 \neq 0$, і тому дріб можна скоротити на $x - 4$, тобто

$$\frac{x^2 - 2x - 8}{x - 4} = \frac{(x-4)(x+2)}{x-4} = x + 2.$$

Останній вираз має зміст при всіх значеннях $x \neq 4$, тому

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 2x - 8}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} (x + 2).$$

У цьому випадку можна застосувати теорему про границю суми:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 2x - 8}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} (x + 2) = \lim_{x \rightarrow 4} x + \lim_{x \rightarrow 4} 2 = 4 + 2 = 6.$$

- b) В цьому випадку ні чисельник, ні знаменник не мають границі, тому що обидва необмежено зростають $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Але якщо попередньо перетворити аналітичний вираз під знаком границі, розділивши чисельник і знаменник на x^4 , то одержимо

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4 + 8x}{x^4 + 3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7 + \frac{8}{x^3}}{1 + \frac{3}{x^4}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(7 + \frac{8}{x^3}\right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x^4}\right)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 7 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8}{x^3}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x^4}} = \frac{7 + 0}{1 + 0} = 7.$$

- с) При безпосередній підстановці $x=1$ матимемо невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$. Це означає, що в чисельнику та знаменнику є множник $(x-1)$, який їх перетворює в нуль.

Розділивши чисельник на $(x-1)$ за правилом ділення многочленів, побачимо, що його можна записати у вигляді $x^3 - 5x + 4 = (x - 1)(x^2 + x - 4)$.

Щоб виділити множник $(x-1)$ у знаменнику, множимо знаменник і чисельник на спряжений йому вираз:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x-4)(\sqrt{x+3}+\sqrt{5-x})}{(\sqrt{x+3}-\sqrt{5-x})(\sqrt{x+3}+\sqrt{5-x})} &= \left[\frac{0}{0}\right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x-4)(\sqrt{x+3}+\sqrt{5-x})}{x+3-5+x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x-4)(\sqrt{x+3}+\sqrt{5-x})}{2(x-1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2+x-4)(\sqrt{x+3}+\sqrt{5-x})}{2} = \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2+x-4) \cdot \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x+3}+\sqrt{5-x})}{\lim_{x \rightarrow 1} 2} = \frac{-2 \cdot 4}{2} = -4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 4x} &= \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\cos 5x \cdot \sin 4x} = \frac{5}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos 5x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\sin 4x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = \\ &= \frac{5}{4} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{5}{4}, \end{aligned}$$

оскільки кожний із двох останніх співмножників є границя типу $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sin n}{n}$ яка дорівнює одиниці.

е) Границя виразу, який стоїть у дужках

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 2}{3x - 4} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{2}{x}}{3 - \frac{4}{x}} = 1$$

Показник степені прямує до нескінченності, тобто маємо невизначеність $[1^\infty]$, тому потрібно застосувати другу особливу границю $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$. Для цього перетворимо вираз:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x - 4 + 4 + 2}{3x - 4} \right)^{5x-1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{6}{3x - 4} \right)^{5x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{6}{3x - 4} \right)^{\frac{3x-4}{6}} \right]^{\frac{6}{3x-4}(5x-1)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{30x-6}{3x-4}} = e^{10} \end{aligned}$$

ТЕМА 8. ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ

Практичне заняття

Мета: навчити студентів обчислювати похідні функцій та використовувати їх для аналізу та дослідження функцій. Ознайомити студентів з поняттями похідної, її геометричним та фізичним змістом, методами диференціювання та правилами похідних. Розвинути навички використання похідних для аналізу функцій, знаходження екстремумів та дослідження графіків.

Контрольні питання

1. Що таке похідна функції в точці?
2. Які основні правила диференціювання ви знаєте?
3. Що таке похідна складної функції?
4. Як знайти похідну добутку та частки функцій?
5. Що таке друга похідна функції?
6. Що таке приріст функції?
7. Дайте визначення диференціала функції.
8. Наведіть формулу застосування диференціала функції до наближених обчислень?
9. Що таке рівняння дотичної та нормалі до кривої?
10. Що таке похідна неявної функції?
11. Як обчислити похідну параметричної функції?
12. У чому полягає правило Лопіталя?
13. Дайте визначення другої похідної, третьої похідної, похідної порядку n .
14. Сформулюйте необхідні та достатні умови зростання та спадання функції.
15. Які точки називаються точками екстремуму?
16. Які точки називаються критичними точками?
17. Сформулюйте достатні умови екстремуму.
18. Дайте визначення випуклого вниз (опуклого вгору) графіка функції.
19. Сформулюйте достатні умови опуклості графіка функції.

e) $y = \arcsin^3 x^2$;

f) $y = \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}$.

6. Знайти похідні показникових та логарифмічних функцій:

a) $y = a^{3x}$;

f) $y = e^x(x^2 + 3x - 1)$;

b) $y = 2^{x^3}$;

g) $y = e^{\sqrt{\sin x}}$;

c) $y = e^{-x}$;

h) $y = \ln^5 x$;

d) $y = e^{x^4}$;

i) $y = \ln \sin x$;

e) $y = 7^{\frac{1}{2x}}$;

j) $y = x \ln x$.

7. Знайти похідні функцій:

a) $y = \sin^2 3x \cdot \cos^3 2x$;

d) $y = \arcsin \sqrt{x^2 - 1}$;

b) $y = (e^{\cos x} + 3)^2$;

e) $y = x \arcsin \sqrt{x} + \log_3 \sqrt{1 + x^2}$.

c) $y = (\operatorname{arctg} x)^{\sin 2x}$;

8. Знайти похідні функцій:

a) $y = \frac{\ln x}{x}$;

f) $y = \operatorname{arctg} \frac{a+x}{1-ax}$;

b) $y = \ln \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;

g) $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{x}}$;

c) $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \ln \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$;

h) $y = \sqrt{\frac{1}{\cos x}}$;

d) $y = 5^{\ln(x^2+x+1)}$;

i) $y = \left(\frac{2}{27x} - \frac{1}{9x^2} \right) \sqrt{3x + x^2}$.

e) $e^{\arcsin^2 x}$;

9. Нехай функція $K(x) = 20x - \frac{x^2}{20}$ встановлює залежність витрат виробництва від кількості x продукції, що випускається. Знайти граничні витрати виробництва і коефіцієнт еластичності, якщо обсяг продукції складає 100 од., 20 од.

10. Залежність між витратами виробництва y і обсягом продукції x , що випускається, виражається функцією $y = 50x - 0,05x^3$ (грош. од.). Визначити середні і граничні витрати, якщо обсяг продукції 10 од.

11. Знайти похідні складних функцій:

a) $y = (5x^2 + 7x + 2)^3$;

e) $y = x^2(5x - 4)^6$;

b) $y = \sqrt{x^2 + 3}$;

f) $y = 7x^2\sqrt{5 + 2x}$;

c) $y = \sqrt{3x}$;

g) $y = \left(\frac{x}{1+x^2}\right)^3$.

d) $y = \frac{2}{(3x^2-5)^3}$;

12. Знайти диференціали функцій:

a) $y = x$;

c) $y = 2x^3 - x^2 + 3$;

b) $y = x^2$;

d) $y = \ln(x^2 + 4)$.

13. Знайти похідну третього порядку функції $y = 5x^4$.

14. Знайти похідну четвертого порядку функції $y = 3x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 8$.

15. Знайти похідну п'ятого порядку функції $y = \sin^2 x$.

16. Знайти похідні другого порядку функцій:

a) $y = x^2 \arcsin x$;

b) $y = (x + 1)e^{\sin x}$;

c) $y = x^{\ln x}$.

17. Обчислити границі функцій за правилом Лопіталя:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 2x^2 + 2x - 1}$;

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x + \ln x}{1 - \sqrt{2x - x^2}}$;

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^4 - 3x^2 - 4}$;

e) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\frac{1}{x}}$;

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e}$;

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$.

18. Дослідити функцію $y = (x + 1)(x - 1)^3$ на екстремум.

19. Виробник реалізує свою продукцію за ціною p за одну одиницю. Витрати

виробництва задаються залежністю $B(x) = ax + bx^3$, де x – об'єм

продукції, a, b – деякі коефіцієнти, $a > 0$, $b > 0$. Знайти оптимальний

для виробництва об'єм продукції та відповідний йому прибуток.

20. Дослідити на опуклість графік функції $y = (x + 1)^3(x - 1)$.

21. Дослідити функцію $y = 3x^3 - 9x^2 + 5x + 1$ та побудувати її графік.

Приклади розв'язання задач до теми 8
«Похідна та її застосування для дослідження функцій»

1. Знайти похідну функцій:

a) $y = (\ln x + 1)^3$;

b) $y = \sqrt{x^2 + 4x} + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3}}$;

c) $y = \ln \frac{e^{2x} + x}{\cos 5x}$;

d) $y = x \cdot \arccos \frac{x}{4} - \sqrt{16 - x^2}$.

Розв'язання.

a) Покладемо $y = u^3$, де $u = 1 + \ln x$. Тоді за правилом диференціювання складної функції:

$$y' = 3 \cdot u^2 \cdot u' = 3(1 + \ln x)^2 \cdot (1 + \ln x)' = 3(1 + \ln x)^2 \frac{1}{x}.$$

b) Запишемо функцію у вигляді

$$y = (x^2 + 4x)^{\frac{1}{2}} + (x^2 - 3)^{-\frac{1}{2}}.$$

Позначимо $u = x^2 + 4x$, $v = x^2 - 3$, тоді $y = u^{\frac{1}{2}} + v^{-\frac{1}{2}}$.

Маємо

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \cdot u' - \frac{1}{2} v^{-\frac{3}{2}} \cdot v' = \\ &= \frac{1}{2} (x^2 + 4x)^{-\frac{1}{2}} (2x + 4) - \frac{1}{2} (x^2 - 3)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 4x}} + \frac{x}{\sqrt{(x^2 - 3)^3}}. \end{aligned}$$

c) Запишемо функцію у вигляді $y = \ln(e^{2x} + x) - \ln \cos 5x$.

Маємо

$$y' = \frac{(e^{2x} + x)'}{e^{2x} + x} - \frac{(\cos 5x)'}{\cos 5x} = \frac{2e^{2x} + 1}{e^{2x} + x} + \frac{5 \sin 5x}{\cos 5x} = \frac{2e^{2x} + 1}{e^{2x} + x} + 5 \operatorname{tg} 5x.$$

d) Маємо

$$\begin{aligned} y' &= x' \cdot \arccos \frac{x}{4} + x \cdot \left(\arccos \frac{x}{4} \right)' - \frac{1}{2\sqrt{16 - x^2}} = \\ &= \arccos \frac{x}{4} - \frac{x}{\sqrt{1 - \frac{x^4}{16}}} \cdot \left(\frac{x}{4} \right)' - \frac{1}{2\sqrt{16 - x^2}} \cdot (-2x) = \end{aligned}$$

$$= \arccos \frac{x}{4} - \frac{x}{\sqrt{16-x^4}} + \frac{x}{\sqrt{16-x^2}} = \arccos \frac{x}{4}.$$

2. Дослідити функцію $y = x^3 - 6x^2 - 36x + 41$ та побудувати її графік.

Розв'язання.

- Область визначення функції $D(y) = (-\infty; +\infty)$, тобто функція існує при всіх значеннях.
- Парність, періодичність:

$$y(-x) = -x^3 - 6x^2 + 36x + 41, \quad y(-x) \neq \pm y(x).$$

- Функція загального виду, ні парна, ні непарна, неперіодична.
- Точки перетину з осями координат:

$$\text{з віссю } OX: y = 0 \Rightarrow x^3 - 6x^2 - 36x + 41 = 0.$$

Легко перевірити, що $x_1=1$ є корінь рівняння, тому

$$x^3 - 6x^2 - 36x + 41 = (x-1)(x^2 - 5x - 41).$$

Знайдемо дві інші точки перетину графіка з віссю OX :

$$x^2 - 5x - 41 = 0 \Rightarrow$$

$$x_1 = \frac{5+\sqrt{189}}{2} \approx 9,37, x_2 = \frac{5-\sqrt{189}}{2} \approx -4,37.$$

Точки перетину графіка з віссю OX — $A(1; 0)$, $B(-4,37; 0)$, $C(9,37; 0)$;

точка перетину графіка з віссю OY ($x=0$) — $D(0; 41)$.

- Інтервали зростання та спадання функції, точки екстремуму:

$$y' = 3x^2 - 12x - 36; \quad y' = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 12 = 0.$$

Тоді $x_1=6$, $x_2=-2$ — критичні точки.

Здобуті дані заносимо до таблиці.

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 6)$	6	$(6; +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$ (зростає)	81	$\searrow$ (спадає)	-175	$\nearrow$ (зростає)

Точка максимуму функції $M(-2; 81)$, точка мінімуму $N(6; -175)$.

- Точка перегину, інтервали опуклості та вгнутості:

$$y'' = 6x - 12, \quad y'' = 0, \quad 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2 - \text{критична точка}$$

другого роду.

Дані заносимо до таблиці

x	$(-\infty; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$f'(x)$	–	0	+
$f''(x)$	$\cap$ (опукла)	-47	$\cup$ (вгнута)

Точка перегину $E(2; -47)$.

- Асимптоти:

Вертикальної асимптоти немає, оскільки функція є неперервною.

Дослідимо на горизонтальну асимптоту.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - 6x^2 + 36x + 41) = \infty.$$

Отже, горизонтальної асимптоти немає.

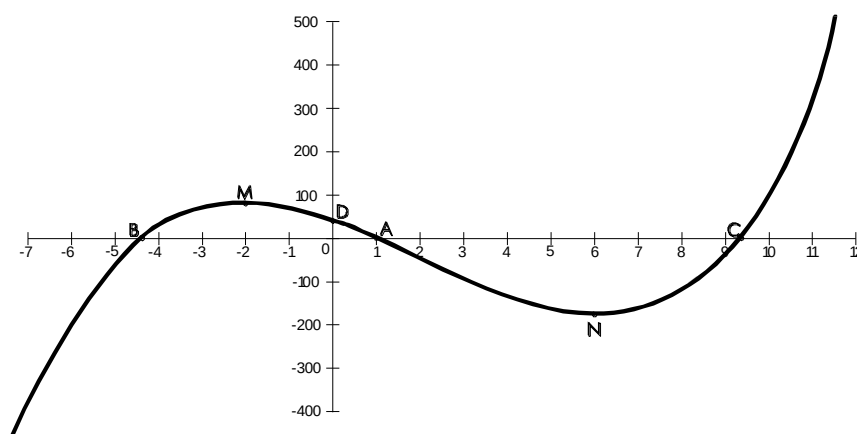
Похила асимптота має вигляд $y = kx + b$, де $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(x)}{x}$,

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y(x) - kx).$$

В нашому випадку $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 6x^2 + 36x + 41}{x} = \infty$. Похилої асимптоти немає.

Отже, функція не має асимптот.

Використовуючи здобуті дані, будуємо графік функції.



ТЕМА 9. ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Практичне заняття

Мета: надати студентам знання про функції багатьох змінних та методи їх дослідження. Ознайомити студентів з поняттями часткових похідних, градієнтів, екстремумів та методами дослідження функцій багатьох змінних. Розвинути вміння аналізувати функції кількох змінних та застосовувати їх у задачах оптимізації.

Контрольні питання

1. Дайте визначення функції багатьох змінних.
2. Як визначити область визначення функції багатьох змінних?
3. Що таке лінія рівня функції двох змінних?
4. Яка функція двох змінних називається неперервною?
5. Що таке повний приріст функції двох змінних?
6. Що називається частинною похідною функції $z = f(x, y)$ по аргументу x ?
7. Що називається частинною похідною функції $z = f(x, y)$ по аргументу y ?
8. Що таке похідна за напрямком та як її знайти?
9. Що називається градієнтом функції $z = f(x, y)$
10. Дайте визначення повного диференціала функції $z = f(x, y)$.
11. Чим відрізняються поняття точки локального максимуму і точки глобального максимуму?
12. Яка точка називається критичною для функції $z = f(x, y)$?
13. Наведіть необхідні умови існування екстремуму функції $z = f(x, y)$.
14. Наведіть достатні умови екстремуму функції двох змінних.
15. Наведіть рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $z = f(x, y)$ у точці $M(x_0, y_0)$.

Задачі для розв'язання

1. Знайти область визначення функції $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.
2. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$ функцій:
 - a) $z = x^2 - 3xy - 4y^2 - x + 2y + 1$;
 - b) Кобба-Дугласа: $z = a_0 x^{a_1} y^{a_2}$;
 - c) $z = \sin(3x + 5y - 2xy - 1)$;
 - d) $z = e^{\frac{x}{y}}$;
 - e) $z = e^{x^2 + y^2}$;
 - f) $z = \arctg \frac{y}{1+x^2}$.
3. Знайти градієнт функції $z = \sqrt{xy}$ у точці (4; 1).
4. Знайти повний диференціал функцій:
 - a) $z = x^y$;
 - b) $z = \ln(x^2 + y^2)$;
 - c) $z = \arctg \frac{x+y}{x-y}$.
5. Обчислити наближено $\arctg(1,02/0,95)$, виходячи зі значення функції $z = \arctg(y/x)$ при $x = 1$, $y = 1$.
6. $z = y \ln x$. Знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.
7. $z = \sin x \sin y$. Знайти $d^2 z$.
8. Скласти рівняння дотичної площини та рівняння нормалі до поверхні $z = 1 + x^2 + y^2$ у точці $M(1; 1; 3)$.
9. Знайти екстремуми функцій
 - a) $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$;
 - b) $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Приклади розв'язання задач до теми 9

«Функції багатьох змінних»

1. Для функції $z = xy \ln(x + y^2)$ знайти

- а) частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$;
- б) повний диференціал функції;
- в) градієнти функції в точці $A(1;-1)$
- г) похідні другого порядку;
- д) d^2z в точці $B(2,1)$.

Розв'язання.

- а) Знайдемо частинні похідні першого порядку. Використаємо правило диференціювання добутку функцій $(u \cdot v)' = u'v + uv'$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= (xy)'_x \ln(x + y^2) + xy (\ln(x + y^2))'_x = \\ &= 1 \cdot y \cdot \ln(x + y^2) + xy \cdot \frac{1}{x + y^2} \cdot 1 = y \ln(x + y^2) + \frac{xy}{x + y^2}; \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= (xy)'_y \ln(x + y^2) + xy (\ln(x + y^2))'_y = \\ &= 1 \cdot x \cdot \ln(x + y^2) + xy \cdot \frac{1}{x + y^2} \cdot 2y = x \ln(x + y^2) + \frac{2xy^2}{x + y^2}.\end{aligned}$$

- б) Повний диференціал функції знайдемо за формулою

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Підставимо знайдені $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$ в дану формулу. Отримаємо

$$dz = \left(y \ln(x + y^2) + \frac{xy}{x + y^2} \right) dx + \left(x \ln(x + y^2) + \frac{2xy^2}{x + y^2} \right) dy.$$

- в) Знайдемо значення частинних похідних в точці А.

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,-1)} &= \left(y \ln(x+y^2) + \frac{xy}{x+y^2}\right)\bigg|_{(1,-1)} = \\ &= -1 \cdot \ln(1+(-1)^2) + \frac{1 \cdot (-1)}{1+(-1)^2} = -\ln 2 + \frac{-2}{2} = -1 + \ln 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,-1)} &= \left(x \ln(x+y^2) + \frac{2xy^2}{x+y^2}\right)\bigg|_{(1,-1)} = \\ &= 1 \cdot \ln(1+(-1)^2) + \frac{1 \cdot (-1)^2}{1+(-1)^2} = \ln 2 + \frac{2}{2} = 1 + \ln 2\end{aligned}$$

$$\overline{\text{grad} z} = (-1 - \ln 2)\bar{i} + (1 + \ln 2)\bar{j} = (1 + \ln 2)(-\bar{i} + \bar{j}).$$

d) Знайдемо частинні похідні другого порядку.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \left(y \ln(x+y^2) + \frac{xy}{x+y^2}\right)'_x = \\ &= y \cdot \frac{1}{x+y^2} \cdot 1 + \frac{(xy)'_x(x+y^2) - xy \cdot (x+y^2)'_x}{(x+y^2)^2} = \\ &= \frac{y}{x+y^2} + \frac{y(x+y^2) - xy \cdot 1}{(x+y^2)^2} = \frac{y \cdot (x+y^2) + y(x+y^2) - xy \cdot 1}{(x+y^2)^2} = \\ &= \frac{2xy + 2y^3 - xy}{(x+y^2)^2} = \frac{xy + 2y^3}{(x+y^2)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \left(x \ln(x+y^2) + \frac{2xy^2}{x+y^2}\right)'_y = \\ &= x \cdot \frac{1}{x+y^2} \cdot 2y + \frac{(2xy^2)'_y(x+y^2) - 2xy^2 \cdot (x+y^2)'_y}{(x+y^2)^2} = \\ &= \frac{2xy}{x+y^2} + \frac{4xy(x+y^2) - 2xy^2 \cdot 2y}{(x+y^2)^2} = \\ &= \frac{2xy \cdot (x+y^2) + 4xy(x+y^2) - 4xy^3}{(x+y^2)^2} = \\ &= \frac{6x^2y + 6xy^3 - 4xy^3}{(x+y^2)^2} = \frac{6x^2y + 2xy^3}{(x+y^2)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(y \ln(x + y^2) + \frac{xy}{x + y^2} \right)'_y = \\
&= 1 \cdot \ln(x + y^2) + y \cdot \frac{1}{x + y^2} \cdot 2y + \frac{(xy)'_y (x + y^2) - xy \cdot (x + y^2)'_y}{(x + y^2)^2} = \\
&= \ln(x + y^2) + \frac{2y^2}{x + y^2} + \frac{x(x + y^2) - xy \cdot 2y}{(x + y^2)^2} = \\
&= \ln(x + y^2) + \frac{2xy^2 + 2y^4 + x^2 + xy^2 - 2xy^2}{(x + y^2)^2} = \\
&= \ln(x + y^2) + \frac{2y^4 + x^2 + xy^2}{(x + y^2)^2}
\end{aligned}$$

е) Диференціал другого порядку знайдемо за формулою

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2.$$

Обчислимо значення других похідних в точці $B(2,1)$.

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_{(2,1)} &= \left. \left(\frac{xy + 2y^3}{(x + y^2)^2} \right) \right|_{(2,1)} = \frac{2 \cdot 1 + 2 \cdot 1^3}{(2 + 1^2)^2} = \frac{4}{9}, \\
\left. \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right|_{(2,1)} &= \left. \left(\frac{6x^2 y + 2xy^3}{(x + y^2)^2} \right) \right|_{(2,1)} = \frac{6 \cdot 2^2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 1^3}{(2 + 1^2)^2} = \frac{28}{9}, \\
\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{(2,1)} &= \left. \left(\ln(x + y^2) + \frac{2y^4 + x^2 + xy^2}{(x + y^2)^2} \right) \right|_{(2,1)} = \\
&= \ln(2 + 1^2) + \frac{2 \cdot 1^4 + 2^2 + 2 \cdot 1^2}{(2 + 1^2)^2} = \ln 3 + \frac{8}{9}.
\end{aligned}$$

Отже,

$$d^2 z = \frac{4}{9} dx^2 + 2 \left(\ln 3 + \frac{8}{9} \right) dx dy + \frac{28}{9} dy^2$$

2. Знайти екстремуми функції $z = x^3 - 3xy + y^3$

Розв'язання.

Знайдемо частинні похідні першого порядку

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^3 - 3xy + y^3)'_x = 3x^2 - 3y;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^3 - 3xy + y^3)'_y = -3x + 3y^2.$$

Знайдемо стаціонарні точки. Для цього прирівняємо похідні до нуля та розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0, \\ -3x + 3y^2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - y = 0, \\ x = y^2, \end{cases} \quad \begin{cases} y^4 - y = 0, \\ x = y^2, \end{cases} \quad \begin{cases} y(y^3 - 1) = 0, \\ x = y^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0, \\ y = 1, \\ x = y^2, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0, \\ x = 0, \\ y = 1, \\ x = 1. \end{cases}$$

Отримали дві стаціонарні точки $K(0,0)$ та $M(1,1)$.

Знайдемо другі похідні функції z .

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (3x^2 - 3y)'_x = 6x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (3x^2 - 3y)'_y = -3,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (-3x + 3y^2)'_y = 6y.$$

1) Обчислимо значення похідних в точці $K(0,0)$.

$$A = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_{(0,0)} = 6x|_{(0,0)} = 0$$

$$C = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right|_{(0,0)} = 6y|_{(0,0)} = 0,$$

$$B = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{(0,0)} = -3$$

$AC - B^2 = 0 \cdot 0 - (-3)^2 = -9 < 0$. Отже, в точці $K(0,0)$ немає екстремуму.

2) Обчислимо значення похідних в точці $M(1,1)$.

$$A = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_{(1,1)} = 6x|_{(1,1)} = 6 > 0$$

$$C = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right|_{(1,1)} = 6y|_{(1,1)} = 6,$$

$$B = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{(1,1)} = -3.$$

$$AC - B^2 = 6 \cdot 6 - (-3)^2 = 36 - 9 = 27 > 0.$$

Отже, точка $M(1,1)$ – точка мінімуму.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ № 5

Завдання I

Знайти границі функцій:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5-4x+3x^4}{7-2x^2-2x^4}; \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2-4x-6}{2x^2-5x-3}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\operatorname{tg} 5x}.$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-4}{3n+2} \right)^{2n-4}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3+6x-5}{7-4x^3}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x^2-6x-8}{x^3-8}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{\sqrt{x^2+25}-5}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x \sin 2x}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{3x/(x-1)}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2-6x+1}{x^3-4x}; \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-4x+3}{2x^2-5x+3}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{2x+7}-5}{\sqrt{x}+7-4}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x-1}{x \operatorname{tg} x}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow \infty} (x+3)(\ln(2x-3) - \ln(2x+1)).$$

$$10. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^4+1}+x}{2x^2-4x}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-4x}{3x^2-5x-2}.$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+7}-3}{\sqrt{4+x}-\sqrt{6-x}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{x - \sin 3x}.$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin 2x)^{1/3x}.$$

$$13. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2+6x-4}{\sqrt{16x^4+1}+x}; \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2+7x-60}{x^3-25x}.$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{3x+1}-4}{\sqrt{7x}+1-5}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 2x}{x \sin 3x}.$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 2} (3-x)^{5x/(x-2)}.$$

$$16. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4-7x^2+5}{4x-5x^4}; \quad \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2-4x-12}{2x^2-5x-42}.$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{6x}-6}{\sqrt{x+1}-\sqrt{13-x}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 4x}.$$

$$18. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-6}{5x+4} \right)^{2x-3}.$$

$$19. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 7x + 49}{3x^5 - 4x + 1};$$

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 14x + 49}{x^2 - x - 42}.$$

$$20. \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{7x-7}}{\sqrt{2x} + 2 - 4};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} 2x \operatorname{ctg} 5x.$$

$$21. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{1+3x}{2x}}.$$

$$22. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 4x} + 1}{5x - 4};$$

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{3x^2 - 20x - 32}{x^2 - 64}.$$

$$23. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{5x-1} - 3}{\sqrt{8x} - 4};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg}^2 5x \cdot \sin^2 2x.$$

$$24. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x-4}{2x-5} \right)^{\frac{1}{3x}}.$$

$$25. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4 + 5x^2}{5 - 4x^4};$$

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^2 - 81}{2x^2 - 5x + 9}.$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{9x} - 9}{x^2 - 10x - 9};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{3x(x^2 + 1)}.$$

$$27. \lim_{x \rightarrow 1} (3x - 2)^{4x/x^2 - 1}.$$

$$28. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 + 3x^2 - 6}{\sqrt{x^3 + 4}};$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{3x^2 - 5x - 2}.$$

$$29. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1} - \sqrt{5x-1}}{x^2 - x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin 2x \cdot \operatorname{ctg}^2 3x.$$

$$30. \lim_{x \rightarrow 2} (2x - 3)^{1/x - 2}.$$

Завдання II

Знайти похідні функцій

$$1. y = \sqrt[3]{1 + \sqrt{x}} + \sqrt[4]{1 + \sqrt[3]{x}}.$$

$$2. y = \frac{\sin 4x + 1}{\operatorname{tg} 3x}.$$

$$3. y = \ln \frac{e^{2x} + \sqrt{x}}{\cos 3x}.$$

$$4. y = \operatorname{arctg} \frac{\cos x}{\sin x}.$$

$$5. y = \sqrt[4]{\frac{1+x^2}{1+\sqrt[3]{x}}}.$$

6. $y = \frac{\operatorname{tg} 2x + 4}{\sin 5x}.$
7. $y = \ln \frac{e^{3x} + 2^x}{\sin 4x}.$
8. $y = \arcsin \frac{2 \cos x}{\sqrt{5}}.$
9. $y = \sqrt{x^3 + 4x} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}}.$
10. $y = \frac{\operatorname{tg} 4x + 8x}{\cos 9x}.$
11. $y = \ln \frac{\sqrt{1 + \sin^2 x} + \sqrt{2} \sin x}{1 + \sin^2 x - \sqrt{2} \sin x}.$
12. $y = \operatorname{arctg} \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}.$
13. $y = x^3 \sqrt{x^5 + 5x^4 - \frac{7}{x}}.$
14. $y = \frac{\cos 8x + e^{2x}}{\operatorname{ctg} 4x}.$
15. $y = \ln(\sin x + \sqrt{\sin^2 x - 1}).$
16. $y = \arcsin x \frac{1}{2 \sin x}.$
17. $y = \sqrt[3]{x^2 + 4x} - \frac{1}{x^2 + 1}.$
18. $y = \frac{\sin 4x + 2^x}{\lg(4x)}.$
19. $y = x \operatorname{tg} x + \ln \cos x.$
20. $y = x \arcsin \frac{x}{2} + \sqrt{4 - x^2}.$
21. $y = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 5}}.$
22. $y = \frac{\sin 9x + \operatorname{tg} 2x}{\cos 3x}.$
23. $y = -\frac{x}{\sin x} + \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$
24. $y = x \arccos \frac{x}{3} + \sqrt{9 - x^2}.$
25. $y = x^2 + \sqrt[6]{\frac{1 + x^6}{1 - x^6}}.$
26. $y = \frac{\sin 5x + 4^x}{\operatorname{tg} 3x}.$
27. $y = x \ln(x^2 - 4) - 2x + 2 \ln \frac{x+2}{x-2}.$

$$28. y = x \arcsin \frac{2}{x} + 2 \ln(x + \sqrt{x^2 - 9}).$$

$$29. y = x^2 + \sqrt[5]{\frac{1+x^2}{1-5x^3}}.$$

$$30. y = \sqrt[3]{\frac{1-\sin 2x}{\cos 3x}}.$$

Завдання III

Дослідити методами диференціального числення функцію і побудувати її графік.

$$1. y = 3x^3 - 9x^2 + 5x + 1.$$

$$2. y = x^3 - 6x^2 - 15x + 20.$$

$$3. y = x^3 - \frac{15}{2}x^2 - 12x + \frac{37}{2}.$$

$$4. y = x^3 - 24x^2 + 23.$$

$$5. y = x^3 + 3x^2 - 9x - 2.$$

$$6. y = x^3 + 6x^2 + 9x - 50.$$

$$7. y = x^3 + 9x^2 + 15x + 2.$$

$$8. y = x^3 - 12x - 9.$$

$$9. y = x^3 - 9x^2 - 21x + 164.$$

$$10. y = x^3 + 9x^2 - 48x - 56.$$

$$11. y = x^3 - 9x^2 + 5x + 1.$$

$$12. y = 2x^3 - 6x^2 - 15x + 20.$$

$$13. y = 2x^3 - \frac{15}{2}x^2 - 12x + \frac{37}{2}.$$

$$14. y = 2x^3 - 24x^2 + 23.$$

$$15. y = 2x^3 + 3x^2 - 9x - 2.$$

$$16. y = 2x^3 + 6x^2 + 9x - 50.$$

$$17. y = 2x^3 + 9x^2 + 15x + 2.$$

$$18. y = 2x^3 - 12x - 9.$$

$$19. y = 2x^3 - 9x^2 - 21x + 164.$$

$$20. y = 2x^3 + 9x^2 - 48x - 56$$

$$21. y = x^3 - 9x^2 + 5x + 1.$$

$$22. y = 3x^3 - 6x^2 - 15x + 20.$$

$$23. y = 3x^3 - \frac{15}{2}x^2 - 12x + \frac{37}{2}.$$

$$24. y = 3x^3 - 24x^2 + 23.$$

$$25. y = 3x^3 + 3x^2 - 9x - 2.$$

$$26. y = 3x^3 + 6x^2 + 9x - 50.$$

$$27. y = 3x^3 + 9x^2 + 15x + 2.$$

$$28. y = 3x^3 - 12x - 9.$$

$$29. y = 3x^3 - 9x^2 - 21x + 164.$$

$$30. y = 3x^3 + 9x^2 - 48x - 56$$

ТЕМА 10. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Практичне заняття

Мета: засвоїти поняття первісної та невизначеного інтеграла, опанувати техніку обчислення інтегралів за допомогою таблиці та методом заміни змінної, набутти навиків підбору підстановок та підведення функції під знак диференціала, засвоїти формулу інтегрування частинами, набутти навиків виділяти під інтегралом множники u та dv , опанувати техніку обчислення інтегралів від раціональних функцій.

Контрольні питання

1. Що таке первісна функції, які її властивості?
2. Сформулюйте достатні умови існування первісної.
3. Дайте означення невизначеного інтеграла. Які його властивості?
4. Наведіть теорему про заміну змінної у невизначеному інтегралі.
5. Скільки первісних має функція $f(x)$ на проміжку і чим вони відрізняються одна від одної? Навести приклад двох різних первісних для функції x^2 .
6. Чи завжди первісна функція є елементарною? Наведіть приклад функції, інтеграли від яких не є елементарними функціями.
7. Наведіть формулу інтегрування частинами у невизначеному інтегралі.
8. Яким умовам повинні задовольняти функції $u(x)$ та $v(x)$ у формулі інтегрування частинами?
9. Яка функція називається раціональною?
10. Дайте означення цілої та дробової раціональних функцій, правильного та неправильного раціонального дробу.
11. Які дробі називаються елементарними?
12. Сформулюйте теорему про розклад многочлена з дійсними коефіцієнтами на множники.
13. Сформулюйте теорему про розклад правильного раціонального дробу на елементарні.
14. Яку підстановку слід робити в інтегралах типу

$$\int R\left(x, (ax+b)^{\frac{m}{n}}, \dots, (ax+b)^{\frac{r}{s}}\right) dx,$$

де R – раціональна функція своїх аргументів?

15. Якою підстановкою обчислюються інтеграли типу

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right) dx?$$

16. Як обчислюються інтеграли типу $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$?

17. Якою підстановкою обчислюються інтеграли типу $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$?

18. Якою підстановкою обчислюються інтеграли типу $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx$?

19. Якою підстановкою обчислюються інтеграли типу $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$?

20. Наведіть теорему Чебишева про інтегрування диференціального бінома

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx.$$

21. Якою підстановкою інтеграли типу $\int R(\sin x, \cos x) dx$ у загальному випадку зводяться до інтегрування раціональних функцій?

22. Яку підстановку слід робити, якщо виконується рівність $R(-\sin x, \cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x)$?

23. Яку підстановку слід робити, якщо виконується рівність $R(\sin x, -\cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x)$?

24. Яку підстановку слід робити, якщо виконується рівність $R(-\sin x, -\cos x) \equiv R(\sin x, \cos x)$?

Задачі для розв'язання

1. Обчислити інтеграли і перевірити диференціюванням одержаний результат:

a) $\int x dx$;

e) $\int \sqrt{x} dx$;

b) $\int x^2 dx$;

f) $\int \sqrt[3]{x^2} dx$;

c) $\int x^5 dx$;

g) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$;

d) $\int dx$;

2. Обчислити інтеграли:

a) $\int \frac{dx}{x^2-4};$

c) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}};$

b) $\int \frac{dx}{4x^2+25};$

d) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}.$

3. Знайти первісну для функції $f(x) = \sin x$, яка в точці $x = \frac{\pi}{2}$ приймає значення рівне 6.

4. Обчислити інтеграли:

a) $\int 7x^5 dx;$

c) $\int \frac{6}{x^2} dx;$

b) $\int 3\sqrt[4]{x^3} dx;$

d) $\int 5 dx.$

5. Обчислити інтеграли:

a) $\int (x^3 - 3x^2 + 5x - 4) dx;$

c) $\int (3x^2 - 1)^2 dx;$

b) $\int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{x^3} - \frac{3}{\sqrt{x}} \right) dx;$

d) $\int \frac{x^4}{1+x^2} dx.$

6. Обчислити інтеграли:

a) $\int \frac{x dx}{x^2+2};$

f) $\int \frac{dx}{4x-1};$

b) $\int \frac{x^2}{x^3-3} dx;$

g) $\int 2^{3x-4} dx;$

c) $\int \sin 2x dx;$

h) $\int \frac{x dx}{4+x^2};$

d) $\int \cos(3x+5) dx;$

i) $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)}.$

e) $\int e^{2x-1} dx;$

7. За допомогою формули інтегрування частинами обчислити інтеграли:

a) $\int x \sin 2x dx;$

c) $\int \sqrt{x} \ln x dx;$

b) $\int x^2 e^x dx;$

d) $\int \arctg x dx.$

8. Розкласти на елементарні дроби:

a) $\frac{11x+40}{4(x-4)(x+2)};$

c) $\frac{x+1}{(x^2+1)x};$

b) $\frac{x+1}{(x-1)^2(x+2)};$

d) $\frac{1}{x^3+1}.$

9. Виділити цілу частину дробу $\frac{x^3+1}{x^2-4x+5}.$

10. Обчислити інтеграли від елементарних дробів:

a) $\int \frac{dx}{x-3};$

d) $\int \frac{dx}{x^2+4x+6};$

b) $\int \frac{dx}{5-2x};$

e) $\int \frac{3x+4}{x^2+7x+14} dx.$

c) $\int \frac{dx}{(x-2)^3};$

11. Обчислити інтеграл від раціональних функцій:

a) $\int \frac{x^2+x+5}{x(x+3)(x-2)} dx;$

b) $\int \frac{3x-1}{(x-1)^2(x^2+1)} dx;$

c) $\int \frac{2x^4-2x^3+5x^2+x-1}{2x^3-x-1} dx.$

12. Обчислити інтеграли:

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}};$

d) $\int \frac{x^4}{\sqrt{x-1}} dx;$

b) $\int \frac{x dx}{\sqrt[3]{2x-3}};$

e) $\int \frac{\sqrt{3x+4}}{x^2} dx.$

c) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}} dx;$

13. Обчислити інтеграли:

a) $\int \frac{dx}{x^2+2x+9};$

b) $\int \frac{3x-7}{\sqrt{5x^2+8x+1}} dx.$

14. Обчислити інтеграли:

a) $\int x^{-1} \left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{-3} dx;$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}.$

15. Обчислити інтеграли:

a) $\int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}} dx;$

b) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{a^2-x^2}};$

c) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}.$

16. Обчислити інтеграли:

a) $\int \frac{dx}{3 \cos x + 2};$

c) $\int \sin 3x \cos 5x dx;$

b) $\int \sin^2 x \cos^3 x dx;$

d) $\int \frac{dx}{\cos^3 x}.$

Приклади розв'язання задач до теми 10

«Невизначений інтеграл»

Обчислити невизначені інтеграли. Результат перевірити диференціюванням:

a) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln x}};$

b) $\int \frac{\operatorname{arctg}^3 5x}{1+25x^2} dx;$

c) $\int x \cos 3x dx;$

d) $\int \frac{x^2-3x+10}{(x-1)(x^2+3)} dx.$

Розв'язання

a) Обчислимо інтеграл методом заміни змінної:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln x}} &= \left| \begin{array}{l} t = 1 - \ln x \\ dt = -\frac{dx}{x} \\ \frac{dx}{x} = -dt \end{array} \right| = - \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = - \int t^{-\frac{1}{2}} dt = - \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \\ &= -2\sqrt{t} + C = -2\sqrt{1-\ln x} + C. \end{aligned}$$

Перевірка:

$$(-2\sqrt{1-\ln x} + C)' = \frac{2}{2x\sqrt{1-\ln x}} = \frac{1}{x\sqrt{1-\ln x}}.$$

b) Обчислимо інтеграл методом заміни змінної:

$$\begin{aligned} \int \frac{\operatorname{arctg}^3 5x}{1+25x^2} dx &= \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{arctg} 5x \\ dt = \frac{5dx}{1+25x^2} \\ \frac{dx}{1+25x^2} = \frac{1}{5} dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{5} t^3 dt = \\ &= \frac{1}{20} t^4 + C = \frac{1}{20} \operatorname{arctg}^4 5x + C. \end{aligned}$$

Перевірка:

$$\left(\frac{1}{20} \operatorname{arctg}^4 5x + C \right)' = \frac{4}{20} \operatorname{arctg}^3 5x \cdot \frac{5}{1+(5x)^2} = \frac{\operatorname{arctg}^3 5x}{1+25x^2}.$$

с) Застосуємо формулу інтегрування по частинах $\int u dv = uv - \int v du$:

$$\int x \cos 3x dx = \left| \begin{array}{l} u = x \\ dv = \cos 3x dx \\ du = dx \\ v = \frac{1}{3} \sin 3x \end{array} \right| = \frac{1}{3} x \sin 3x - \frac{1}{3} \int \sin 3x dx =$$

$$= \frac{1}{3} x \sin 3x + \frac{1}{9} \cos 3x + C.$$

Перевірка:

$$\left(\frac{1}{3} x \sin 3x + \frac{1}{9} \cos 3x + C \right)' = \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{3} x \cdot 3 \cos 3x - \frac{3}{9} \sin 3x = x \cos 3x.$$

d) Використаємо метод інтегрування раціональних дробів. Для цього представимо підінтегральний дріб у вигляді суми найпростіших дробів:

$$\frac{x^2 - 3x + 10}{(x - 1)(x^2 + 3)} = \frac{A}{x - 1} - \frac{Bx + C}{x^2 + 3} = \frac{A(x^2 + 3) + (Bx + C)(x - 1)}{(x - 1)(x^2 + 3)}.$$

Прирівняємо чисельники дробів правої та лівої частин:

$$A(x^2 + 3) + (Bx + C)(x - 1) = x^2 - 3x + 10.$$

$$\text{Нехай } x = 1 \Rightarrow 4A = 8, \quad A = 2;$$

$$x = 0 \Rightarrow 3A - C = 10, \quad C = -4;$$

$$x = 2 \Rightarrow 7A + 2B + C = 8, \quad B = -1.$$

$$\text{Отже, } \int \frac{x^2 - 3x + 10}{(x - 1)(x^2 + 3)} dx = \int \left(\frac{2}{x - 1} + \frac{-x - 4}{x^2 + 3} \right) dx =$$

$$= 2 \int \frac{dx}{x - 1} - \int \frac{x dx}{x^2 + 3} - 4 \int \frac{dx}{x^2 + 3} =$$

$$= 2 \ln|x - 1| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 3) - \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + C.$$

Перевірка:

$$\left(2 \ln|x - 1| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 3) - \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + c \right)' =$$

$$\frac{2}{x - 1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + 3} \cdot 2x - \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{x - 1} - \frac{x}{x^2 + 3} - \frac{4}{x^2 + 3} =$$

$$= \frac{2x^2 + 6 - x^2 + x - 4x + 4}{(x - 1)^2(x + 3)} = \frac{x^2 - 3x + 10}{(x - 1)^2(x + 3)}.$$

ТЕМА 11. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Практичне заняття

Мета: забезпечити студентів знаннями про визначені інтеграли та їх застосування у задачах математичного аналізу. Ознайомити студентів з поняттям визначеного інтегралу, його властивостями та методами обчислення. Розвинути вміння обчислювати визначені інтеграли за формулою Ньютона-Лейбніца, засвоїти методи заміни змінної та інтегрування частинами у визначених інтегралах, обчислювати площі плоских фігур та об'єми тіл обертання, використовувати визначені інтеграли для розв'язання задач механіки, фізики та геометрії.

Контрольні питання

1. Наведіть геометричний зміст визначеного інтеграла.
2. Сформулюйте достатні умови інтегрованості функції.
3. Як визначити площу криволінійної трапеції за допомогою визначеного інтегралу?
4. Наведіть формулу Ньютона-Лейбніца.
5. Які властивості визначеного інтеграла ви знаєте?
6. Наведіть формулу заміни змінної у визначеному інтегралі. При яких умовах ця формула має місце?
7. Наведіть формулу інтегрування частинами визначеного інтеграла.
8. Як обчислюються площі плоских фігур?
9. Як обчислюються об'єми тіл обертання?

Задачі для розв'язання

1. Обчислити інтеграли, застосовуючи формулу Ньютона-Лейбніца:
 - a) $\int_a^b \sin x \, dx$;
 - b) $\int_0^1 x^2 \, dx$;
 - c) $\int_1^2 e^x \, dx$;
 - d) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$;
 - e) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

2. Обчислити інтеграли, застосовуючи формулу заміни змінної:

- a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x + \pi) dx$; e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos x dx$;
b) $\int_0^1 e^{2x} dx$; f) $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$;
c) $\int_0^1 \frac{x dx}{1+x^2}$; g) $\int_1^4 \frac{\sqrt{x} dx}{1+\sqrt{x}}$.
d) $\int_1^3 x^3 \sqrt{x^2 - 1} dx$;

3. Обчислити інтеграли, застосовуючи формулу інтегрування частинами:

- a) $\int_0^1 x e^x dx$; c) $\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx$;
b) $\int_0^{\pi/2} x \cos 2x dx$; d) $\int_0^1 \arctg x dx$.

4. Знайти об'єм продукції, випущеної за 5 років, якщо функція Кобба-Дугласа має вигляд $y = (1 + 2t)e^{4t}$.

5. За даними дослідження у розподілі прибутку в одній із країн крива Лоренца може бути описана рівнянням $y = 2 - \sqrt{4 - x^2}$, де x – доля населення, y – доля прибутку населення. Обчислити коефіцієнт Джині.

6. Визначити дисконтний прибуток за три роки при процентній ставці 8%, якщо базові капіталовкладення склали 10 млн. гривень, а очікуване зростання капіталу – 1 млн. гривень.

7. Знайти середній час, що затрачений на освоєння випуску одного виробу в період освоєння від 10 до 20 виробів, якщо затрата часу на 1-й виріб $\alpha = 200$ хв., показник виробничого процесу $\beta = 0,5$.

8. Нехай функція $y = f(t)$ описує зміну продуктивності праці деякого підприємства за певний час. Знайти об'єм продукції, що випущена за проміжок часу $[0; T]$.

9. Знайти площу фігури, яка обмежена лініями

$$y = \sqrt{x}, \quad x = 1, \quad x = 4, \quad y = 0.$$

10. Знайти площу фігури, яка обмежена лініями

$$y = x^2 - 5x + 6, \quad x = 2, \quad x = 3, \quad y = 0.$$

11. Знайти площу фігури, яка обмежена лініями $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.

12. Знайти площу фігури, яка обмежена лініями $y = x$, $y = 2 - x^2$.

13. Знайти площу фігури, яка обмежена лініями

$$y = x, \quad y = \frac{1}{x^2}, \quad y = 0, \quad x = 0.$$

14. Обчислити об'єм тіла, що отримане обертанням фігури, обмеженої лініями

$$y = x^2 - 6x + 5, \quad y = 0, \text{ навколо осі } O_x.$$

15. Обчислити об'єм тіла, що отримане обертанням фігури, обмеженої лініями

$$y = -x^2 + 1, \quad x = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \text{ навколо осі } O_x.$$

16. Обчислити об'єм тіла, що отримане обертанням фігури, обмеженої лініями

$$y = x, \quad y^2 = 5x - 4, \text{ навколо осі } O_y.$$

17. Визначити обсяг продукції, виробленої робітником за другу годину роботи дня, якщо продуктивність праці характеризується функцією

$$f(t) = \frac{2}{3t+4} + 3.$$

18. Комп'ютер коштує 2 тис. грош. од. Прибуток від зробленої на комп'ютері роботи визначається функцією $s(t) = 4t^3 + 10t^2 + 4t + 5$, де t – час (років), s – заощадження (тис. грош. од.). Через який час покритуться витрати на придбання комп'ютера?

Приклади розв'язання задач до теми 11

«Визначений інтеграл»

1. Обчислити визначений інтеграл методом заміни змінної

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$$

Розв'язання

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \left| \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x} dx \\ \alpha = \ln 1 = 0 \\ \beta = \ln e = 1 \end{array} \right| = \int_0^1 t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}.$$

2. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями

$$y = -x^2 + 4x + 5 \text{ та } y = 2x - 3.$$

Розв'язання

а) Побудуємо параболу.

Для цього знайдемо координати її вершини:

$$x_{\text{в}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{-2} = 2,$$

$$y_{\text{в}} = -2^2 + 4 \cdot 2 + 5 = 9.$$

Отже, $A(2; 9)$ – вершина параболу.

Знайдемо координати точок перетину параболу з віссю OX : $y=0$, тобто

$$-x^2 + 4x + 5 = 0.$$

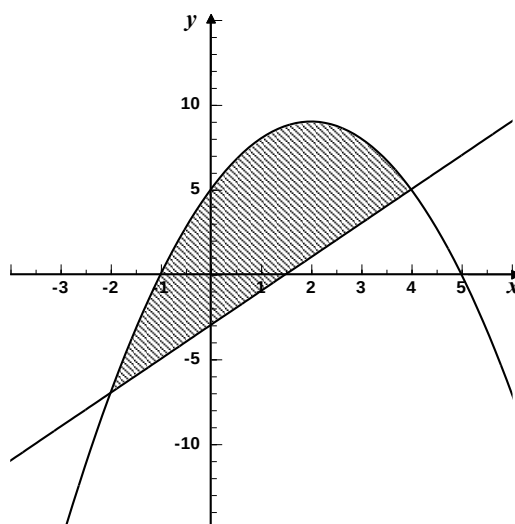
Корені цього рівняння

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 5.$$

Таким чином, $D(-1; 0)$ і $F(5; 0)$ – точки перетину параболу з віссю OX .

б) Побудуємо пряму. Для цього знайдемо точки перетину її з осями координат: $B\left(\frac{3}{2}; 0\right)$ та $C(0; -3)$.

Побудуємо рисунок.



в) Для знаходження границь інтегрування знайдемо точки перетину параболи та прямої. Для цього розв'язуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 4x + 5, \\ y = 2x - 3. \end{cases}$$

Тобто

$$x^2 - 2x - 8 = 0;$$

$$x_1 = -2, \quad x_2 = 4.$$

г) Обчислюємо шукану площу за формулою:

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx,$$

де $f(x) = -x^2 + 4x + 5$, $g(x) = 2x - 3$, $a = -2$, $b = 4$:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^4 (-x^2 + 4x + 5 - (2x - 3)) dx = \\ &= \int_{-2}^4 (-x^2 + 2x + 8) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + x^2 + 8x \right) \Big|_{-2}^4 = \\ &= -\frac{4^3}{3} + 4^2 + 8 \cdot 4 - \left(-\frac{(-2)^3}{3} + (-2)^2 + 8 \cdot (-2) \right) = 36 \text{ кв. од.} \end{aligned}$$

ТЕМА 12. ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Практичне заняття

Мета: навчитися розв'язувати диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними, однорідні диференціальні рівняння, лінійні диференціальні рівняння першого порядку методом Лагранжа і методом Бернуллі, а також рівняння у повних диференціалах. Розвинути навички розв'язання задач математичного моделювання з використанням диференціальних рівнянь.

Контрольні питання

1. Що називається загальним розв'язком диференціального рівняння?
2. Що називається частинним розв'язком диференціального рівняння?
3. Наведіть теорему Коші про існування та єдиність розв'язку.
4. Як знайти загальний розв'язок диференціального рівняння з відокремлюваними змінними?
5. Яке диференціальне рівняння називається однорідним?
6. Якою заміною можна звести однорідне диференціальне рівняння до рівняння з відокремленими змінними?
7. Яке диференціальне рівняння називається лінійним?
8. У чому полягає метод Лагранжа?
9. У чому полягає метод Бернуллі?
10. Яке диференціальне рівняння називається рівнянням у повних диференціалах?

Задачі для розв'язання

1. Знайти загальний розв'язок рівняння з відокремленими змінними:
 - a) $\frac{dy}{dx} = xy^2 + 2xy$;
 - b) $x^2 y^2 y' + 1 = y$;
 - c) $xydx + (x + 1)dy = 0$;
 - d) $\sqrt{y^2 + 1}dx = xydy$.

2. Знайти частинний розв'язок рівняння $e^x dx - (1 + e^x)y dy = 0$, що задовольняє умову $y(0) = 1$.
3. Знайти загальний розв'язок однорідного рівняння:
 - a) $x dy = (x + y) dx$;
 - b) $(x - y) dx + (x + y) dy = 0$;
 - c) $(y^2 - 2xy) dx + x^2 dy = 0$;
 - d) $y^2 + x^2 y' = xy y'$;
 - e) $xy' = y - x \cdot e^{\frac{y}{x}}$;
 - f) $(2x + y + 1) dx - (4x + 2y - 3) dy = 0$.
4. Сумарний прибуток фірми є функцією $y(x)$, де x – кількість виробленої продукції. Граничний прибуток фірми відповідає функції $y'(x) = 50000 - x$. Якою буде функція сумарного прибутку фірми, якщо нульовий випуск продукції дає нульовий прибуток?
5. Розв'язати рівняння:
 - a) $y' + y \tan x = \cos^2 x$;
 - b) $y' - y = e^{2x}$;
 - c) $x^2 y' + xy + 1 = 0$;
 - d) $y = x \cdot (y' - x \cos x)$;
 - e) $2x(x^2 + y) dx = dy$;
 - f) $xy dy = (y^2 + x) dx$.

Приклади розв'язання задач до теми 12
«Звичайні диференціальні рівняння»

1. Розв'язати рівняння з відокремлюваними змінними

$$x(1 + y^2) + y(1 + x^2)y' = 0.$$

Розв'язання

Запишемо дане рівняння у вигляді

$$x(1 + y^2) dx + y(1 + x^2) dy = 0.$$

Розділивши обидві частини цього рівняння на добуток

$$(1 + x^2)(1 + y^2) \neq 0,$$

дістанемо рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{x}{1+x} dx + \frac{y}{1+y^2} dy = 0.$$

Інтегруючи це рівняння, послідовно знаходимо

$$\begin{aligned} \int \frac{xdx}{1+x^2} + \int \frac{ydy}{1+y^2} &= C_1, \\ \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \frac{1}{2} \ln(1+y^2) &= \frac{1}{2} \ln C, \\ (C_1 &= \frac{1}{2} \ln C). \end{aligned}$$

Звідси $(1 + x^2)(1 + y^2) = C$.

2. Розв'язати лінійне рівняння першого порядку методом варіації довільної сталої (методом Лагранжа)

$$y' - 2xy = 3x^2 - 2x^4.$$

Розв'язання

Розглянемо однорідне рівняння

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = 0.$$

Функція $y \equiv 0$ є розв'язком цього рівняння. Інші його розв'язки знайдемо, відокремлюючи змінні:

$$\frac{dy}{y} = 2x dx.$$

Звідси знаходимо

$$\begin{aligned} \ln|y| &= x^2 + \ln C, C > 0; \\ y &= Ce^{x^2}, C \in R, C \neq 0. \end{aligned}$$

Розв'язок $y = 0$ можна дістати з останньої формули при $C = 0$, тому всі розв'язки однорідного рівняння визначаються рівністю $y = Ce^{x^2}, C \in R$. Розв'язки вихідного рівняння шукаємо у вигляді $y = C(x)e^{x^2}$. Підставивши цей вираз у дане рівняння, дістанемо

$$\frac{dC(x)}{dx} e^{x^2} + 2xe^{x^2} C(x) - 2xC(x)e^{x^2} = 3x^2 - 2x^4,$$

$$\frac{dC(x)}{dx} = e^{-x^2} (3x^2 - 2x^4),$$

$$C(x) = \int e^{-x^2} (3x^2 - 2x^4) dx = x^3 e^{-x^2} + C,$$

де $C \in R$ – довільна стала.

Розв'язки заданого рівняння мають вигляд

$$y = (C + x^3 e^{-x^2}) e^{x^2} = C e^{x^2} + x^3.$$

3. Розв'язати лінійне рівняння першого порядку методом Бернуллі

$$xy' - 2y = 2x^4.$$

Розв'язання

Розв'язок шукаємо у вигляді $y = u(x)v(x)$.

Маємо

$$x(u'v + uv') - 2uv = 2x^4,$$

$$xu'v + xuv' - 2uv = 2x^4,$$

$$xu'v + u(xv' - 2v) = 2x^4.$$

Функцію виберемо так, щоб $xv' - 2v = 0$.

$$x \frac{dv}{dx} = 2v,$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{2dx}{x},$$

$$\ln v = 2 \ln x + \ln C_1,$$

$$\ln v = \ln(Cx^2), v = Cx^2.$$

Нехай, наприклад $C = 1$, тоді $v(x) = x^2$.

Тоді для функції $u(x)$ дістанемо рівняння $x^3 u' = 2x^4$.

$$u' = 2x, u = x^2 + C.$$

Отже, всі розв'язки заданого рівняння визначаються формулою

$$y = (x^2 + C)x^2,$$

або

$$y = Cx^2 + x^4.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ №6

Завдання I

Знайти невизначені інтеграли. Результат перевірити диференціюванням.

1. $\int \frac{\arcsin 2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx.$

2. $\int \frac{x dx}{x^4+25}.$

3. $\int x^3 \ln x dx.$

4. $\int \frac{6x^2-18x-6}{(x+1)(x-2)(x-5)} dx.$

5. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2+\ln x}}.$

6. $\int \frac{x^2 dx}{16-x^6}.$

7. $\int x \sin 3x dx.$

8. $\int \frac{5x^2-13x+9}{(x-2)^2(x+1)} dx.$

9. $\int \frac{\operatorname{arctg}^3 x dx}{1+x^2}.$

10. $\int \frac{x dx}{\sqrt{4-x^4}}.$

11. $\int x e^{-2x} dx.$

12. $\int \frac{3x^2-x-2}{(x-2)(x^2+4)} dx.$

13. $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x}.$

14. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4+x^6}}.$

15. $\int \operatorname{arctg} 5x dx.$

16. $\int \frac{6x^2-14x-22}{(x+2)(x-3)(x-4)} dx.$

17. $\int \frac{e^{3x} dx}{e^{3x}+5}.$

18. $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{25-x^{10}}}$

19. $\int \frac{x dx}{\sin^2 x}.$

$$20. \int \frac{5x^2 - 13x + 6}{(x-1)^2(x-3)} dx.$$

$$21. \int \frac{\arccos 3x}{\sqrt{1-9x^2}} dx.$$

$$22. \int \frac{x^3 dx}{x^8 - 16}.$$

$$23. \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx.$$

$$24. \int \frac{3x^2 + 5x + 12}{(x+1)(x^2+9)} dx.$$

$$25. \int \frac{\cos x dx}{\sin^3 x}.$$

$$26. \int \frac{x dx}{\sqrt{9+x^4}}.$$

$$27. \int \arcsin 3x dx.$$

$$28. \int \frac{6x^2 + 14x - 32}{(x+3)(x+5)(x-7)} dx.$$

$$29. \int \frac{\ln^3 x}{x} dx.$$

$$30. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{9+x^8}}.$$

Завдання II

Обчислити визначений інтеграл методом заміни змінної.

$$1. \int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x dx.$$

$$2. \int_0^8 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}}.$$

$$3. \int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln x)}.$$

$$4. \int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}.$$

$$5. \int_1^3 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}.$$

$$6. \int_0^{\pi/6} \cos^3 x dx.$$

$$7. \int_1^e \frac{\sqrt{1-\ln x}}{x} dx.$$

$$8. \int_4^9 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}.$$

9. $\int_0^{\pi/3} \sin^3 x \, dx.$
10. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}.$
11. $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x \, dx.$
12. $\int_0^8 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}}.$
13. $\int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln x)}.$
14. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x+e^{-x}}.$
15. $\int_1^3 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}.$
16. $\int_0^{\pi/6} \cos^3 x \, dx.$
17. $\int_1^e \frac{\sqrt{1-\ln x}}{x} dx.$
18. $\int_4^9 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}.$
19. $\int_0^{\pi/3} \sin^3 x \, dx.$
20. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}.$
21. $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x \, dx.$
22. $\int_0^8 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}}.$
23. $\int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln x)}.$
24. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x+e^{-x}}.$
25. $\int_1^3 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}.$
26. $\int_0^{\pi/6} \cos^3 x \, dx.$
27. $\int_1^e \frac{\sqrt{1-\ln x}}{x} dx.$
28. $\int_4^9 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}.$
29. $\int_0^{\pi/3} \sin^3 x \, dx.$

$$30. \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 + \cos x}.$$

Завдання III

Обчислити площу фігури, обмеженої лініями

$$y = ax^2 + bx + c \text{ та } y = kx + d.$$

Зробити малюнок.

- | | |
|--------------------------|----------------|
| 1. $y = x^2 + 3x - 3;$ | $y = 2x + 3.$ |
| 2. $y = -x^2 + 5x - 1;$ | $y = 5 - 2x.$ |
| 3. $y = x^2 - x - 5;$ | $y = 2x - 1.$ |
| 4. $y = 3 - 3x - x^2;$ | $y = -2x - 3.$ |
| 5. $y = x^2 + x - 5;$ | $y = 2x + 1.$ |
| 6. $y = 5 + x - x^2;$ | $y = 1 - 2x.$ |
| 7. $y = x^2 - 3x - 3;$ | $y = 2x - 3.$ |
| 8. $y = 5 - x - x^2;$ | $y = -2x - 1.$ |
| 9. $y = x^2 - 5x + 1;$ | $y = 2x - 5.$ |
| 10. $y = 3 + 3x - x^2;$ | $y = 3 - 2x.$ |
| 11. $y = x^2 + 3x - 3;$ | $y = 2x + 3.$ |
| 12. $y = -x^2 + 5x - 1;$ | $y = 5 - 2x.$ |
| 13. $y = x^2 - x - 5;$ | $y = 2x - 1.$ |
| 14. $y = 3 - 3x - x^2;$ | $y = -2x - 3.$ |
| 15. $y = x^2 + x - 5;$ | $y = 2x + 1.$ |
| 16. $y = 5 + x - x^2;$ | $y = 1 - 2x.$ |
| 17. $y = x^2 - 3x - 3;$ | $y = 2x - 3.$ |
| 18. $y = 5 - x - x^2;$ | $y = -2x - 1.$ |
| 19. $y = x^2 - 5x + 1;$ | $y = 2x - 5.$ |
| 20. $y = 3 + 3x - x^2;$ | $y = 3 - 2x.$ |
| 21. $y = x^2 + 3x - 3;$ | $y = 2x + 3.$ |
| 22. $y = -x^2 + 5x - 1;$ | $y = 5 - 2x.$ |
| 23. $y = x^2 - x - 5;$ | $y = 2x - 1.$ |

- | | |
|-------------------------|----------------|
| 24. $y = 3 - 3x - x^2;$ | $y = -2x - 3.$ |
| 25. $y = x^2 + x - 5;$ | $y = 2x + 1.$ |
| 26. $y = 5 + x - x^2;$ | $y = 1 - 2x.$ |
| 27. $y = x^2 - 3x - 3;$ | $y = 2x - 3.$ |
| 28. $y = 5 - x - x^2;$ | $y = -2x - 1.$ |
| 29. $y = x^2 - 5x + 1;$ | $y = 2x - 5.$ |
| 30. $y = 3 + 3x - x^2;$ | $y = 3 - 2x.$ |

Завдання IV

Розв'язати рівняння з відокремлюваними змінними:

1. $xy' - y = 0.$
2. $y^2 + xy' = 0.$
3. $\ln|\cos x| y' + y \operatorname{tg} x = 0.$
4. $x \cos x + 2yy' = 0.$
5. $2y \sin x^2 + \frac{y''}{x} = 0.$
6. $xy' - y \ln y = 0.$
7. $(x^2y - x^2)y' = (xy^2 + y^2).$
8. $(y^2 + 4) + xy' = 0.$
9. $(y^2 + 3) - \frac{2}{\sqrt{x}}yy' = 0.$
10. $y' = (2y + 1)\operatorname{tg} x.$
11. $\sin x \operatorname{tgy} + \frac{y'}{\cos x} = 0.$
12. $5^{y-2}y' + x = 0.$
13. $(x^3 + 4)y' + 3x^2\sqrt{1 - y^2} = 0.$
14. $2xy' + (1 + x) \sin^2 y \operatorname{tgy} = 0.$
15. $(y + 1)y' = \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} + xy.$
16. $y' = \frac{xy^3+x}{-xy^2+y^2}.$
17. $(xy - x)^2y' + y(1 - x) = 0.$

18. $(1 + x^2)y' + y\sqrt{1 + x^2} = 0.$
19. $2^{y-2}y' + (x^3 + x - 5) = 0.$
20. $(y^2 - 2)y' + (x^3 - 6x) = 0.$
21. $(1 - 3y^2)y' = \frac{x+2}{2y}.$
22. $\cos x + (2y - 1)y' = 0.$
23. $3x^2(y + 1) + (x^3 + 1)y' = 0.$
24. $x(y + 1)y' + y(2x^2 + 1) = 0.$
25. $\frac{y}{y'} = \ln y.$
26. $(1 + e^{2x})y^2y' = e^x.$
27. $y'(y^2 - 1) + x^3 = 0.$
28. $y' \sin x - (\cos x - \sin x)(y + 1) = 0.$
29. $xy + (x + 1)y' = 0.$
30. $xy + (1 + y^2)\sqrt{1 + x^2}y' = 0.$

Завдання V

Розв'язати лінійне диференціальне рівняння першого порядку

1. $y' - 2xy = 3x;$
2. $xy' - 2y = 2x^4;$
3. $y' + y \cos x = e^{-\sin x};$
4. $y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x};$
5. $y' \sin x - y \cos x = -\frac{\sin^2 x}{x^2};$
6. $y' \sin 2x = 2(y + \cos x);$
7. $y' \cos x - y \sin x = 2 \sin 2x;$
8. $xy' + y = \ln x - 1;$
9. $y' + \frac{2y}{x} = -\frac{2e^{-x^2}}{x};$
10. $(2x + 1)y' + 2y = x;$

11. $y' - 2xy = 3x;$
12. $xy' - 2y = 2x^4;$
13. $y' + y \cos x = e^{-\sin x};$
14. $y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x};$
15. $y' \sin x - y \cos x = -\frac{\sin^2 x}{x^2};$
16. $y' \sin 2x = 2(y + \cos x);$
17. $y' \cos x - y \sin x = 2 \sin 2x;$
18. $xy' + y = \ln x - 1;$
19. $y' + \frac{2y}{x} = -\frac{2e^{-x^2}}{x};$
20. $(2x + 1)y' + 2y = x;$
21. $y' - 2xy = 3x;$
22. $xy' - 2y = 2x^4;$
23. $y' + y \cos x = e^{-\sin x};$
24. $y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x};$
25. $y' \sin x - y \cos x = -\frac{\sin^2 x}{x^2};$
26. $y' \sin 2x = 2(y + \cos x);$
27. $y' \cos x - y \sin x = 2 \sin 2x;$
28. $xy' + y = \ln x - 1;$
29. $y' + \frac{2y}{x} = -\frac{2e^{-x^2}}{x};$
30. $(2x + 1)y' + 2y = x.$

ТЕМА 13. ЧИСЛОВІ ТА ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

Практичне заняття

Мета: навчити студентів основам теорії числових та функціональних рядів та їх застосуванням. Ознайомити студентів з поняттями збіжності рядів, степеневими та тригонометричними рядами. Розвинути вміння працювати з рядами та використовувати їх у математичному аналізі.

Контрольні питання

1. Що таке числовий ряд та його сума?
2. Які умови збіжності числових рядів?
3. Що таке ознака Д'аламбера та ознака Коші?
4. Як визначити збіжність ряду за ознакою порівняння?
5. Що таке степеневий ряд та область його збіжності?
6. Як знайти радіус та інтервал збіжності степеневого ряду?
7. Що таке функціональний ряд та приклади його застосування?
8. Як обчислити суму геометричного ряду?
9. Що таке гармонічний ряд та його збіжність?
10. Як визначити збіжність ряду за ознакою Лейбніца?
11. Що таке розклад функції в ряд Тейлора та Маклорена?
12. Як обчислити суму ряду за допомогою інтегрування?
13. Що таке рівномірна збіжність ряду функцій?

Задачі для розв'язання

1. Дослідити на збіжність числові ряди:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^3}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{n^2+2}{n^2+1} \right)$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$.

2. Знайти область збіжності степеневому ряду

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2+1} x^n;$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2+1} x^n;$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^n;$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(2n+1)^2 \sqrt{3^n}} x^n.$

3. Знайти з точністю до 0,001 наближене значення функції $g(x_0)$, користуючись її розкладанням у степеневий ряд.

Приклади розв'язання задач до теми 13

«Числові та функціональні ряди»

1. Дослідити на збіжність числові ряди

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-3}{3n+7};$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+3}{n^4+7n+2}};$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(n+3)!};$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n-3}{n+5}\right)^{3n};$

e) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^5 n}$

Розв'язання

a) Перевіримо виконання необхідної умови збіжності числових рядів

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-3}{3n+7} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4n}{n} - \frac{3}{n}}{\frac{3n}{n} + \frac{7}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{3}{n}}{3 + \frac{7}{n}} = \frac{4}{3} \neq 0.$$

Необхідна умова збіжності числових рядів не виконується. Отже, ряд розбіжний.

b) Скористаємось граничною ознакою порівняння.

$$a_n = \sqrt{\frac{n+3}{n^4+7n+2}} \sim \sqrt{\frac{n}{n^4}} = \frac{1}{n^{3/2}} = b_n.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ – гармонічний ряд. Оскільки $\alpha = \frac{3}{2} > 1$, то цей ряд збіжний.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{n+3}{n^4+7n+2}} : \frac{1}{n^{3/2}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{(n+3)n^3}{n^4+7n+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n^4+3n^3}{n^4+7n+2}} \\ &= \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\frac{n^4}{n^4} + \frac{3n^3}{n^4}}{\frac{n^4}{n^4} + \frac{7n}{n^4} + \frac{2}{n^4}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1 + \frac{3}{n}}{1 + \frac{7}{n^3} + \frac{2}{n^4}}} = 1. \end{aligned}$$

За граничною ознакою порівняння обидва ряди одночасно збігаються.

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+3}{n^4+7n+2}}$ збіжний.

с) Використаємо ознаку Д'аламбера.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{5^n}{(n+3)!}, \quad a_{n+1} = \frac{5^{n+1}}{(n+4)!} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5^{n+1}}{(n+4)!} : \frac{5^n}{(n+3)!} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1} \cdot (n+3)!}{(n+4)! \cdot 5^n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n \cdot 5 \cdot (n+3)!}{(n+3)! \cdot (n+4) \cdot 5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{(n+4)} = 0 < 1. \end{aligned}$$

За ознакою Д'аламбера ряд збігається.

d) Використаємо радикальну ознаку Коші.

$$\begin{aligned} a_n &= \left(\frac{4n-3}{n+5} \right)^{3n} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{4n-3}{n+5} \right)^{3n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n-3}{n+5} \right)^3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{4n}{n} - \frac{3}{n}}{\frac{n}{n} + \frac{5}{n}} \right)^3 = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4 - \frac{3}{n}}{1 + \frac{5}{n}} \right)^3 = 4^3 = 64 > 1. \end{aligned}$$

За радикальною ознакою Коші ряд розбігається.

е) Використаємо інтегральну ознаку Коші.

$$a_n = \frac{1}{n \cdot \ln^5 n}.$$

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \cdot \ln^5 x} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_2^a \frac{1}{x \cdot \ln^5 x} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a \frac{d(\ln x)}{\ln^5 x} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\ln^{-4} x}{-4} \Big|_2^a =$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{-4 \ln^4 x} \Big|_2^a = \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{-4 \ln^4 a} + \frac{1}{4 \ln^4 2} \right) = \frac{1}{4 \ln^4 2} < \infty.$$

Невласний інтеграл збігається. Отже, за інтегральною ознакою Коші ряд збігається.

2. Розкласти в степеневий ряд функцію $x^3 e^{x^2}$ і визначити інтервал її збіжності.

Розв'язання

Використовуючи формулу розкладу функції e^x (див. додаток 6) і підставляючи x^2 замість x , отримаємо

$$e^{x^2} = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \dots + \frac{x^{2n}}{n!} + \dots$$

Помноживши праву і ліву частини на x^3 , отримаємо:

$$x^3 e^{x^2} = x^3 + \frac{x^5}{1!} + \frac{x^7}{2!} + \dots + \frac{x^{2n+3}}{n!} + \dots$$

Інтервал збіжності визначимо за ознакою Д'аламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{2n+3}}{(n+1)!} \frac{n!}{x^{2n+3}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} x^2 = 0 < 1 \quad - \quad \text{ця нерівність}$$

виконується при будь-якому x , тобто інтервал збіжності $(-\infty, +\infty)$.

3. З точністю до 0,001 обчислити значення радикала $\sqrt{17}$;

Розв'язання

Перетворимо вираз $\sqrt{17}$ до вигляду:

$$\sqrt{17} = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{16 \left(1 + \frac{1}{16} \right)} = \sqrt{4^2 \left(1 + \frac{1}{16} \right)} = 4 \left(1 + \frac{1}{16} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Далі скористаємося біноміальним рядом (1.4) для $m = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{16}$:

$$\left(1 + \frac{1}{16} \right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16} + \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right)}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{1}{16} \right)^2 + \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \left(\frac{1}{2} - 2 \right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left(\frac{1}{16} \right)^3 + \dots =$$

$$= 1 + \frac{1}{2 \cdot 16} - \frac{1}{2^3 \cdot 16^2} + \frac{1}{2^4 \cdot 16^3} - \frac{5}{2^7 \cdot 16^4} + \dots =$$

$$= 1 + 0,0312 - 0,0004 + 0,00001 + \dots$$

Одержаний ряд, починаючи з другого члена, знакозмінний і задовольняє ознаці Лейбніца, тому похибка при обчисленні його суми не більша від першого відкинутого члена.

Четвертий член розкладу, помножений на 4, задовольняє нерівності $0,0004 < 0,001$, а тому обчислення проводимо, утримуючи три члени ряду:

$$\sqrt{17} = 4(1 + 0,0312 - 0,0004) = 4 \cdot 1,0308 = 4,1232 \approx 4,123.$$

4. З точністю до 0,0001 обчислити значення $\sin 3^\circ$.

Розв'язання

Переведемо аргумент функції з градусної міри до радіанної. Так як 180° відповідають π радіан, то з пропорції

$$\begin{array}{rcl} 180^\circ & - & \pi, \\ 3^\circ & - & x \end{array}$$

находимо $x = \frac{3^\circ \cdot \pi}{180^\circ} = \frac{1}{60}.$

Підставляємо цей аргумент у ряд для функції $\sin x$ і знаходимо

$$\sin 3^\circ = \sin \frac{1}{60} = \frac{1}{60} - \frac{1}{60^3 \cdot 3!} + \frac{1}{60^5 \cdot 5!} - \frac{1}{60^7 \cdot 7!} + \dots =$$

$$= 0,016666667 - 0,00000008 + \dots = 0,0167.$$

Одержаний ряд знакозмінний і задовольняє ознаці Лейбніца, тому похибка при обчисленні його суми не більша від першого відкинутого члена.

Вже другий член розкладу задовольняє нерівності $0,00000008 < 0,0001$, а тому обчислення проводимо, утримуючи один член ряду.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ № 7

Завдання I

Дослідити збіжність числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

1. $\frac{1}{\sqrt[5]{n+3}}; \frac{n!}{5^n}; \left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^n \cdot (n+1)^{3n}.$
2. $\frac{1}{2^{n+5}}; \frac{(n^2+5)}{(n+2)!}; \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{5^n}.$
3. $\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}; \frac{2n-3}{\sqrt{n \cdot 5^n}}; \left(\frac{3n+2}{4n-1}\right)^n (n-1)^{3n}.$
4. $\frac{1}{(3n-1)(3n+4)}; \frac{(3n-5)^3}{(2n)!}; \frac{3^{n+1}}{n^n}.$
5. $\frac{n+5}{n^2+3}; \frac{2n+1}{\sqrt{n \cdot 3^n}}; 5^{n-1} \cdot e^{-n}.$
6. $\frac{1}{\sqrt{n^3+5}}; \frac{5^n}{7^{n(3n-2)}}; \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{7^n}.$
7. $\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}; \frac{n^2}{(n+3)!}; (1+n)^{5n} \left(\frac{2n}{3n+4}\right)^{4n}.$
8. $\frac{1}{(n+2)(n+5)}; \frac{5^{2n}}{(2n-1)!}; \left(\frac{2n+1}{4n+1}\right)^{\frac{n}{3}} \cdot \frac{1}{2^n}.$
9. $\frac{n+2}{n\sqrt{n}}; \frac{(2n)!}{(3n)!}; \left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{1}{3^n}.$
10. $\frac{n^2}{n^3+3}; \frac{5^n(n+1)!}{(2n)!}; 7^{n+2} \cdot n^{-n}.$
11. $\frac{1}{\sqrt[7]{n+2}}; \frac{n!}{6^n}; \left(\frac{3n+2}{4n+3}\right)^n \cdot (n+1)^{4n}.$
12. $\frac{1}{2^{n+7}}; \frac{(n^2+3)}{(n+4)!}; \left(\frac{n-2}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{4^n}.$
13. $\frac{1}{(4n+1)(4n+3)}; \frac{2n-1}{\sqrt{n \cdot 3^n}}; \left(\frac{3n+5}{7n-3}\right)^n (n+1)^{3n}.$
14. $\frac{1}{(3n+1)(3n+2)}; \frac{(3n-1)^3}{(2n)!}; \frac{4^{n+2}}{n^n}.$
15. $\frac{n+6}{n^2+4}; \frac{3n+1}{\sqrt{n \cdot 4^n}}; 7^{n-1} \cdot e^{-n}.$
16. $\frac{1}{\sqrt{n^3-6}}; \frac{3^n}{5^{n(3n+1)}}; \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{5^n}.$

$$17. \frac{1}{\sqrt{n^2+n+4}}; \quad \frac{n^2}{(n+4)!}; \quad (1+n)^{4n} \left(\frac{2n+1}{3n-4} \right)^{3n}.$$

$$18. \frac{1}{(n-2)(n+3)}; \quad \frac{7^{2n}}{(2n+1)!}; \quad \left(\frac{2n-1}{3n+2} \right)^{\frac{n}{3}} \cdot \frac{1}{2^n}.$$

$$19. \frac{n-2}{n\sqrt{n}}; \quad \frac{(2n-1)!}{(3n)!}; \quad \left(\frac{2n+1}{n+5} \right)^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{1}{4^n}.$$

$$20. \frac{n^2-1}{n^3+5}; \quad \frac{4^n(n-1)!}{(2n)!}; \quad 6^{n+1} \cdot n^{-n}.$$

$$21. \frac{1}{\sqrt[7]{n+6}}; \quad \frac{n!}{8^n}; \quad \left(\frac{4n-1}{7n+3} \right)^n \cdot (n+3)^{3n}.$$

$$22. \frac{1}{3^{n+5}}; \quad \frac{(n^2-4)}{(n+3)!}; \quad \left(\frac{n-1}{n+3} \right)^n \cdot \frac{1}{3^n}.$$

$$23. \frac{1}{(n+4)(2n+3)}; \quad \frac{2n-1}{\sqrt{n \cdot 6^n}}; \quad \left(\frac{2n+1}{4n-3} \right)^n (n+1)^{2n}.$$

$$24. \frac{1}{(5n-2)(5n+3)}; \quad \frac{(3n-2)^4}{(2n-1)!}; \quad \frac{5^{n+3}}{n^n}.$$

$$25. \frac{n+2}{n^2+1}; \quad \frac{5n+3}{\sqrt{n \cdot 7^n}}; \quad 4^{n+1} \cdot e^{-n}.$$

$$26. \frac{1}{\sqrt{n^3+2}}; \quad \frac{3^n}{5^n(4n+1)}; \quad \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} \cdot \frac{1}{4^n}.$$

$$27. \frac{1}{\sqrt{n^2+3n+2}}; \quad \frac{n^2}{(n-2)!}; \quad (1+n)^{3n} \left(\frac{3n}{5n+1} \right)^{6n}.$$

$$28. \frac{1}{(n-4)(n+3)}; \quad \frac{5^{3n}}{(3n)!}; \quad \left(\frac{3n+2}{4n-1} \right)^{\frac{n}{3}} \cdot \frac{1}{2^n}.$$

$$29. \frac{n-2}{n\sqrt{n}}; \quad \frac{(n+1)!}{(2n)!}; \quad \left(\frac{4n-1}{n+2} \right)^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{1}{5^n}.$$

$$30. \frac{n^2}{n^3-4}; \quad \frac{4^n(n-1)!}{(2n-1)!}; \quad 5^{n-3} \cdot n^{-n}.$$

Завдання II

Розкласти функцію $y = f(x)$ у степеневий ряд, користуючись формулами розкладання у степеневий ряд елементарних функцій. Визначити інтервал збіжності ряду.

1. $x \cos x$;
2. $x^2 \sin x$;

3. $\frac{1}{\sqrt{x}} \sin x;$
4. $\ln \sqrt{x^2 + 1};$
5. $\sqrt{x} \cos x;$
6. $\sqrt{x} e^x;$
7. $x^2 e^{-x};$
8. $x e^{\sqrt{x}};$
9. $x \cos x + \sin x;$
10. $(1 - x^2) \sin x^2;$
11. $x \cos^2 x;$
12. $\ln(x + 2);$
13. $e^{-x} + e^x;$
14. $\frac{x \cos x + \sin x}{x^3};$
15. $\ln(x^2 - 5x + 6);$
16. $x \sin x;$
17. $\frac{\sin x}{x};$
18. $\frac{\cos x}{x^3};$
19. $2^{x^2};$
20. $\sqrt{x^3} e^x;$
21. $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right);$
22. $\sqrt{x} \sin x;$
23. $\sqrt[4]{1 + x^2};$
24. $e^{-x^2} + e^{x^2};$
25. $\frac{\cos x}{x^2};$
26. $x \cos x + x^2 \sin x;$
27. $\ln(x + 4);$
28. $x \sin x^2;$

29. $\sqrt[4]{1+x^3}$;

30. $e^{-x^3} + e^{x^3}$.

Завдання III

Знайти з точністю до 0,001 наближене значення функції $g(x_0)$, користуючись її розкладанням у степеневий ряд.

1. $\sqrt[5]{37}$;

2. $\sin 3^0$;

3. e^{-1} ;

4. $\sqrt[3]{60}$;

5. $\sqrt{e}$;

6. $\cos 6^0$;

7. $\sqrt[10]{1025}$;

8. $\sin 24^0$;

9. e^{-2} ;

10. $\sqrt[3]{7}$;

11. $\sqrt[3]{e}$;

12. $\sin 12^0$;

13. $\sqrt[3]{28}$;

14. $\cos 3^0$;

15. $e^{1/2}$;

16. $\sqrt[5]{33}$;

17. $\sin 18^0$;

18. e^2 ;

19. $\sqrt[3]{124}$;

20. $\sin 15^0$;

21. $\sqrt[5]{e}$;

22. $\sqrt[3]{30}$;

23. $\cos 18^\circ$;

24. $\sin 9^\circ$;

25. $\sqrt[6]{63}$;

26. $\sqrt[4]{e}$;

27. $\sin 6^\circ$;

28. $\sqrt[4]{e^3}$;

29. $\sqrt[10]{1023}$;

30. $\cos 21^\circ$.

ТЕМА 14. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МНОЖИН ТА МАТЕМАТИЧНОЇ ЛОГІКИ

Практичне заняття

Мета: надати студентам фундаментальні знання з теорії множин та математичної логіки. Ознайомити студентів з поняттями множини, операцій над множинами, висловлювань та логічних операторів. Розвинути логічне мислення та вміння застосовувати методи математичної логіки у задачах.

Контрольні питання

1. Що таке множина? Наведіть приклади множин.
2. Які є способи задання множин?
3. Які множини називаються порожньою та універсальною?
4. Що таке підмножина? Наведіть приклади підмножин.
5. Що таке булеан?
6. Які операції можна виконувати над множинами?
7. В чому відмінність між діаграмами Венна та кругами Ейлера?
8. Що таке булева алгебра?
9. Які значення можуть приймати булеві змінні?
10. Що таке булева функція? Наведіть приклади.
11. Основні операції булевої алгебри?
12. Що таке таблиця істинності? Для чого вона використовується?
13. Яка таблиця істинності для операції кон'юнкції, диз'юнкції, заперечення?
14. Що таке еквівалентність та імплікація в булевій алгебрі?
15. Наведіть основні закони булевої алгебри.
16. Що таке закон де Моргана? Як він застосовується?
17. Що таке закон ідемпотентності в булевій алгебрі?
18. Як працює закон поглинання?
19. Що таке досконала диз'юнктивна нормальна форма (ДДНФ) та досконала кон'юнктивна нормальна форма (ДКНФ)?

Задачі для розв'язання

1. Перечисліть всі елементи наступних множин:

- a) $A = \{x \mid x - \text{буква слова «економічний»}\};$
- b) $B = \{x \mid x - \text{буква слова «менеджмент»}\};$
- c) $C = \{x \mid x - \text{парне ціле число, що менше 10, } x > 0\};$
- d) $D = \{x \mid x - \text{дільник числа 20}\};$
- e) $E = \{x \mid x - \text{корінь рівняння } x^2 - 4x + 5 = 0\}.$

2. Виконайте дії для множин із завдання №1.

- a) $A \cup B \cup F; A \cap B \cap F; A|B; B|F; A \cup ;$
- b) $D \cup E \cup C; D \cap C; D|C; C|D; A \cup E;$
- c) $Z \cup Y; Z|Y; Z \cap Y \cap C; Z \cap A; Z \cap \emptyset;$
- d) $Z \cup Z \cup Z \cup \emptyset; Z \cap Y \cap D; Z \setminus Y; Z \setminus D; Z \cup B;$
- e) $F \cup N \cup B; F \cap N \cap B; F \setminus B; B \setminus F; F \cap Y.$

2. Задано універсальну множину $U = \{a, b, c, d, e, m, n\}$ її підмножини $A = \{a, b, c, d, e\}, B = \{a, m\}; C = \{a, d, n\}.$

Виконайте завдання:

- a) $A \cup (\overline{B \cap C}); \overline{A \cup B}; (A \setminus B) \cup (B \setminus C);$
- b) $(A \setminus B) \cup (C \setminus D); \overline{A \cap B}; \bar{A} \setminus \bar{B};$
- c) $(A \setminus B) \setminus (B \setminus C); \bar{A} \cup \bar{B}; \bar{A} \cap \bar{C};$
- d) $(\bar{A} \cup \bar{B}) \cap \bar{C}; \bar{A} \setminus \bar{B}; A \cap B \cap C;$
- e) $(\overline{A \cup B}) \setminus (\overline{A \cap C}); \bar{A}; \bar{B}; A \cap C.$

4. Доведіть тотожності, або спростіть вирази, будуючи діаграми Венна:

- a) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B};$
- b) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C);$
- c) $(\bar{A} \cup B) \cap A = A \cap B;$
- d) $A \cap \bar{B} \cup B;$
- e) $(A \cap B \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C) \cup \bar{B} \cup \bar{C}.$

5. Визначити, чи являються наступні формули тавтологіями?

- a) $(x_1 \wedge x_2) \rightarrow (x_3 \rightarrow x_2)$;
 b) $(x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow ((x_2 \rightarrow x_3) \rightarrow (x_1 \rightarrow x_3))$;
 c) $(\bar{x}_1 \rightarrow x_2) \rightarrow (\bar{x}_2 \rightarrow x_1)$;
 d) $(x_2 \rightarrow x_3) \rightarrow (x_2 \rightarrow (x_1 \rightarrow x_3))$.
6. Чи еквівалентні формули?
 a) $A \equiv B\bar{A}\bar{B} \vee AB$ та $(A \vee \bar{B})(\bar{A} \vee B)$;
 b) $A \equiv (A \vee B)$ та $A \vee B$;
 c) $x_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_3$ та $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)$;
 d) $\bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1\bar{x}_3$ та $\bar{x}_1$
7. Максимально спростити вираз, скористувавшись законами логіки Буля.
 a) $(x_1 \wedge \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \wedge (\bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2) \wedge (x_2 \vee x_3)$;
 b) $(x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2) \vee ((\bar{x}_1 \vee x_2) \wedge (x_3 \vee \bar{x}_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \wedge (x_3 \vee x_4))$;
 c) $(x_1 \vee (x_3 \vee (x_2 \wedge x_3))) \wedge (\overline{x_3 \wedge x_4}) \wedge (x_3 \wedge \bar{x}_4) \wedge (x_3 \vee (\bar{x}_4 \wedge \bar{x}_3 \vee x_4))$;
 d) $((x_4 \vee (x_4 \wedge x_3)) \wedge \bar{x}_4) \vee \bar{x}_2) \wedge ((x_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_1))$.

Приклади розв'язання задач до теми 14

«Елементи теорії множин та математичної логіки»

1. Задано множини

$$U = \{\overline{1; 15}\}, A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}, B = \{3, 5, 6, 7, 12\},$$

$$C = \{1, 3, 4, 9, 10, 15\}$$

Виконати наступні операції:

- a) $(A \cup \bar{B}) \setminus C$;
 b) $\overline{A \cap B} \div C$
 c) $\overline{(A \setminus B) \cap (C \setminus B)} \setminus (C \div A)$.

Розв'язання

a) $\bar{B} = \{1, 2, 4, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15\};$

$$A \cup \bar{B} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15\};$$

$$(A \cup \bar{B}) \setminus C = \{2, 5, 7, 8, 11, 13, 14\}.$$

b) $A \cap B = \{3, 5, 7\};$

$$\overline{A \cap B} = \{1, 2, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\};$$

$$\overline{A \cap B} \div C = \{2, 3, 6, 8, 11, 12, 13, 14\}.$$

c) $A \setminus B = \{1, 9, 11, 13, 15\};$

$$C \setminus B = \{1, 4, 9, 10, 15\};$$

$$(A \setminus B) \cap (C \setminus B) = \{1, 9, 15\};$$

$$\overline{(A \setminus B) \cap (C \setminus B)} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14\};$$

$$C \div A = \{4, 5, 7, 10, 11, 13\};$$

$$\overline{(A \setminus B) \cap (C \setminus B)} \setminus (C \div A) = \{2, 3, 6, 8, 12, 14\}.$$

2. Спростити вираз $\overline{\overline{A \cup B} \cap (\bar{A} \cup \bar{B})}$.

Розв'язання

Для спрощення виразу використаємо закон де Моргана:

$$\overline{\overline{A \cup B} \cap (\bar{A} \cup \bar{B})} = \overline{\overline{A \cup B}} \cup \overline{\bar{A} \cup \bar{B}}.$$

Тепер застосуємо закон інволюції для першої частини виразу та закон де Моргана для другої частини:

$$\overline{\overline{A \cup B}} \cup \overline{\bar{A} \cup \bar{B}} = (A \cup B) \cup (\bar{\bar{A}} \cap \bar{\bar{B}})$$

Знову застосуємо закон інволюції та приберемо зайві дужки:

$$(A \cup B) \cup (\bar{\bar{A}} \cap \bar{\bar{B}}) = (A \cup B) \cup (A \cap B) = A \cup B \cup (A \cap B).$$

Застосуємо закони асоціативності та поглинання:

$$A \cup B \cup (A \cap B) = A \cup (B \cup (A \cap B)) = A \cup B.$$

3. Визначити, чи являється формула тавтологією

$$((\bar{x} \vee y) \wedge \overline{y \wedge z}) \rightarrow ((x \rightarrow \bar{y}) \sim (\bar{z} \vee x)).$$

Розв'язання

Побудуємо таблицю істинності для заданої формули.

x	y	z	$\bar{x}$	$\bar{x} \vee y$	$y \wedge z$	$\overline{y \wedge z}$	$(\bar{x} \vee y) \wedge \overline{y \wedge z}$	$\bar{y}$	$x \rightarrow \bar{y}$	$\bar{z}$	$\bar{z} \vee x$	$(x \rightarrow \bar{y}) \sim (\bar{z} \vee x)$	$((\bar{x} \vee y) \wedge \overline{y \wedge z}) \rightarrow ((x \rightarrow \bar{y}) \sim (\bar{z} \vee x))$
0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0
1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1

У двох випадках (рядки 2 і 7) формула має значення хибно (0). Це означає, що формула не є тавтологією.

ТЕМА 15. ОСНОВИ ТЕОРІЇ ГРАФІВ

Практичне заняття

Мета: забезпечити студентів знаннями основ теорії графів та їх застосування у різних галузях. Ознайомити студентів з поняттями графів, дерев, маршрутів, циклів та алгоритмів пошуку. Розвинути навички роботи з графами для розв'язання задач в інформатиці та оптимізації.

Контрольні питання

1. Що таке граф і які основні елементи він включає?
2. Чим відрізняються порожній граф, нуль-граф та повний граф?
3. У чому різниця між орієнтованими та неорієнтованими графами?
4. Що називається псевдографом?
5. Як визначається степінь вершини у графі?
6. Що таке остовний підграф та яке його призначення?
7. Які унарні операції можна виконувати над графами та що вони означають?
8. Які існують бінарні операції над графами та як вони застосовуються?
9. Що таке маршрут у графі? Чим відкритий маршрут відрізняється від замкнутого?
10. У чому полягає різниця між ланцюгом та шляхом у графі?
11. Що таке цикл у графі та які його властивості?
12. Які вершини називають зв'язними у графі?
13. Що таке паралельні дуги у графі та як їх визначити?
14. Які особливості матриці суміжності та матриці інцидентності графа?
15. Як можна представити граф за допомогою списку суміжності?
16. У чому полягає представлення графа масивом дуг?
17. Що таке дерево у графах і як воно відрізняється від загального графа?
18. Яке визначення остову графа та для чого він використовується?
19. Що таке кореневе дерево та як визначити його корінь?
20. Що таке гілка, лист, висота та ярус дерева?
21. Що таке бінарне дерево та які його особливості?

Задачі для розв'язання

1. Скільки ребер може мати n – вершинний граф, у якого степінь кожної вершини не перевищує числа k ?
2. Побудувати граф G множина вершин якого утворює послідовність натуральних чисел $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$, а множина ребер визначається умовою:
 - а) вершини x_i та x_j не суміжні, коли числа x_i та x_j – парні;
 - б) вершини x_i та x_j не суміжні, коли числа x_i та x_j – взаємнопрості.
3. Для графа, що зображений на рис. 1 побудуйте підграф, що містить 4 вершини, остовний підграф та підграф з ізольованою вершиною

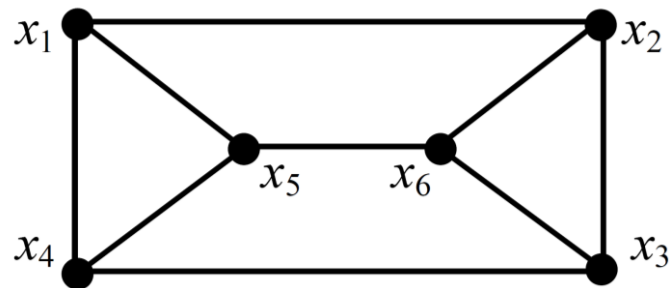


Рисунок 1 Граф задачі 3

4. Для графів G_1 та G_2 , зображених на рис. 2 виконати такі операції об'єднання, перетину та кільцевої суми.

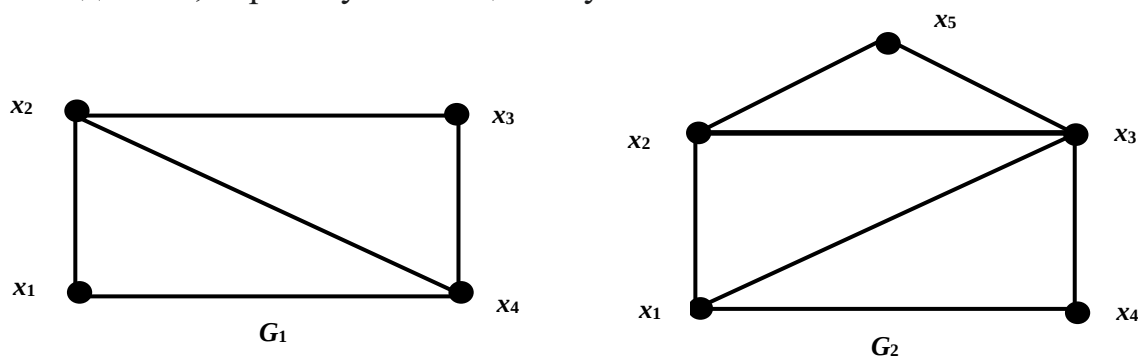


Рисунок 2 Графи G_1 та G_2

5. Для графа, що зображений на Рис. 3 виконати такі операції:
 - а) видалити вершину x_5 ;
 - б) видалити ребра l_8 та l_{10} ;
 - с) замкніть вершини x_2, x_3 ;

- d) стягнути вершини $x_1, x_2, x_3, x_4, x_{10}$;
- e) скласти матрицю інциденцій;
- f) обчислити степені вершин;
- g) записати всі маршрути із точки x_1 до точки x_{10} ;
- h) виділити всі можливі цикли графа.

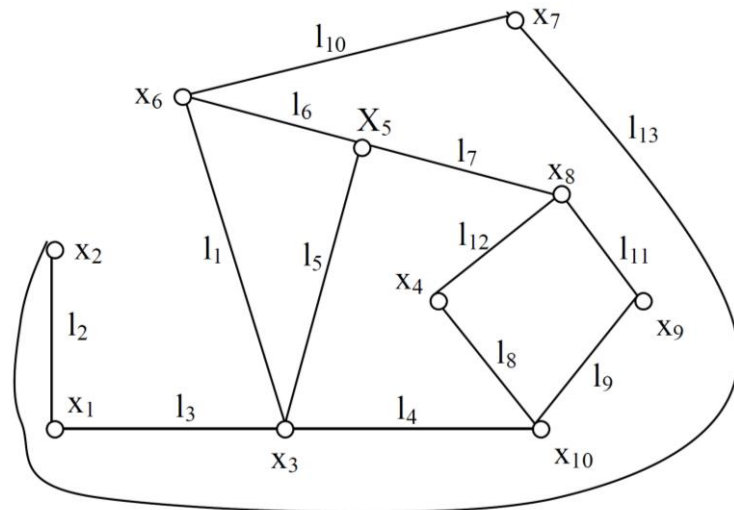


Рисунок 3 Граф задачі 5

6. Побудувати зображення неорієнтованих графів G_1 та G_2 і їх компонент зв'язності. Визначити, чи має граф G_1 цикли. Знайти кількість неорієнтованих шляхів довжиною три із вершини x_i в x_j . Графи задані матрицями суміжності :

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad G_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Для графу G , зображеному на рис. 4, наведіть приклад відкритого та замкнутого маршрутів, ланцюга, шляху та циклу.

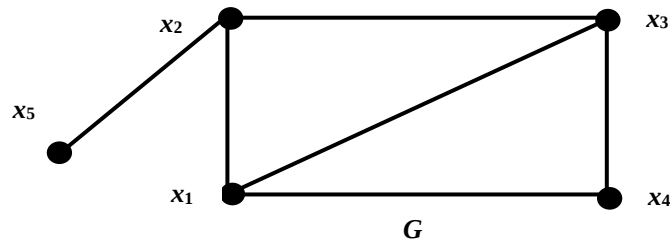


Рисунок 4 Граф G

8. Нехай $X = \{2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12\}$. Побудуйте графи відношень $\rho = \{x_i - \text{парне число}\}$ та $s = \{x_i - \text{дільником}\}$.
9. Задати матрицями інцидентності, суміжності і списком суміжності та масивом ребер неорієнтований граф, зображений на рис. 5:

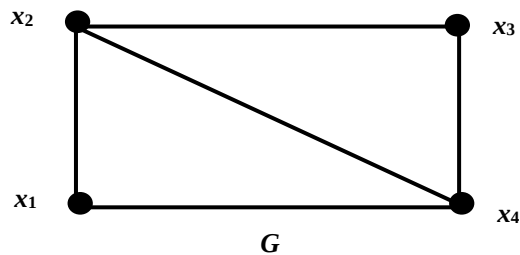


Рисунок 5 Граф G

10. Задати 2 неорієнтованих графи G_1 та G_2 : G_1 : 15 вершин та 20 ребер; G_2 : 10 вершин та 15 ребер (5 з яких спільні з G_1). Графи повинні містити декілька ізольованих вершин та декілька петель.

Виконати над графами такі операції:

- визначити степінь $d(x_i)$ кожної вершини графів G_1 та G_2 ;
- навести 5 підграфів графу G_2 (кількість вершин від 3 до 6);
- навести 2 остовних підграфа графу G_2 ;
- навести 5 циклів графу G_1 ;
- побудувати доповнення до графів G_1 та G_2 ;
- побудувати об'єднання графів $G_1 \cup G_2$;

- g) побудувати перетин графів $\overline{G_1} \cap G_2, G_1 \cap G_2$; побудувати кільцеву суму (додавання за модулем) графів $G_1 \oplus \overline{G_2}, G_2 \oplus \overline{G_1}$
- h) видалити вершини x_i з графу G_1 ;
- i) видалити ребра l_k з графу G_1 ;
- j) ототожнити десять вершин (з x_1 по x_{10} в вершину x' ; з x_{11} по x_{20} в вершину x'') в графі G_2 ;
- k) навести 5 шляхів графу G_2 ;
- l) скласти матрицю суміжності для неорієнтованого графу G_2 ;
- m) скласти матрицю інцидентності для графу G_2 ;
- n) обчислити хроматичні індекси графу G_1 .
11. Для графа, зображеного на рис.6, намалюйте 2 дерева, остови та кодерева.

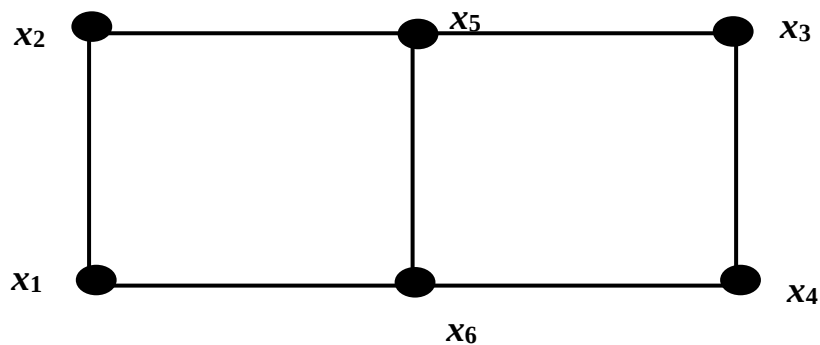


Рисунок 6 Граф задачі 11

12. Назвіть корінь дерева, листки, вітки. Знайдіть висоту дерева. Дерево зображене на Рис. 7. Чи буде це дерево бінарним? Відповідь поясніть.

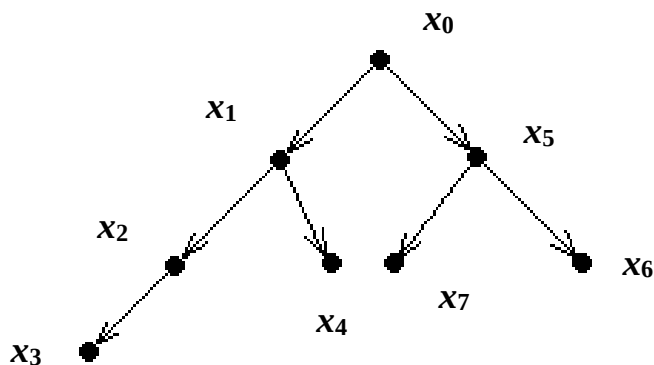
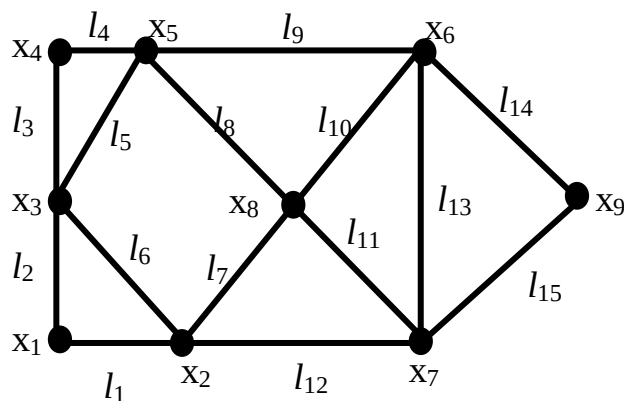


Рисунок 7 Граф задачі 12

Приклади розв'язання задач до теми 15
«Основи теорії графів»

Для графа, зображеного на малюнку

- a) записати матрицю суміжності графа;
- b) записати матрицю інцидентності;
- c) представити граф списками суміжності;
- d) визначити ступінь всіх вершин графа;
- e) визначити ексцентриситет вершини x_1 графа;
- f) обійти граф за алгоритмом пошуку в ширину;
- g) обійти граф за алгоритмом пошуку в глибину.



Розв'язання.

- a) Запишемо матрицю суміжності графа. Для цього побудуємо матрицю A розміром 9×9 , в якій елемент $a_{ij} = 1$, якщо між вершинами i та j існує ребро, і $a_{ij} = 0$, якщо ребра немає.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- b) Запишемо матрицю інцидентності графа. Для цього побудуємо матрицю В розміром 9x15, в якій елемент $b_{ij} = 1$, якщо ребро j інцидентне вершині i , та $b_{ij} = 0$ – в іншому випадку.

	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6	l_7	l_8	l_9	l_{10}	l_{11}	l_{12}	l_{13}	l_{14}	l_{15}
x_1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x_2	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
x_3	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x_4	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x_5	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
x_6	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0
x_7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1
x_8	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0
x_9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1

- c) Представимо граф списками суміжності

x_1	суміжна до	x_2, x_3
x_2	суміжна до	x_1, x_3, x_7, x_8
x_3	суміжна до	x_1, x_2, x_4, x_5
x_4	суміжна до	x_3, x_5
x_5	суміжна до	x_3, x_4, x_6, x_8
x_6	суміжна до	x_5, x_7, x_8, x_9
x_7	суміжна до	x_2, x_6, x_8, x_9
x_8	суміжна до	x_2, x_5, x_6, x_7
x_9	суміжна до	x_6, x_7

d) Степінь вершини – це кількість інцидентних їй ребер графа.

$$\deg(x_1) = 2, \quad \deg(x_4) = 2, \quad \deg(x_7) = 4,$$

$$\deg(x_2) = 4, \quad \deg(x_5) = 4, \quad \deg(x_8) = 4,$$

$$\deg(x_3) = 4, \quad \deg(x_6) = 4, \quad \deg(x_9) = 2.$$

e) Ексцентриситет $e(x_1)$ вершини x_1 зв'язного графа – це відстань від даної вершини до найвіддаленішої вершини.

Знайдемо спочатку всі відстані $d(x_1, x_i)$ між вершинами x_1 і x_i графа.

$$d(x_1, x_2) = 1, \quad d(x_1, x_5) = 2, \quad d(x_1, x_8) = 2,$$

$$d(x_1, x_3) = 1, \quad d(x_1, x_6) = 3, \quad d(x_1, x_9) = 3.$$

$$d(x_1, x_4) = 2, \quad d(x_1, x_7) = 2,$$

Отже, $e(x_1) = 3$.

f) Під час реалізації алгоритму обходу в ширину (BFS-обхід) використовується спеціальна структура даних – черга, яка працює за принципом «першим прийшов – першим вийшов» (FIFO, First In – First Out). Нові елементи додаються у хвіст черги, а обробляються та вилучаються з її голови. Обробка вершини полягає в перегляді всіх її суміжних (ще не відвіданих) вершин, які після цього додаються до черги.

- Обхід графа в ширину почнемо з вершини x_1 , яку додаємо в чергу $[x_1]$.
- Далі додаємо в чергу суміжні до x_1 вершини x_2, x_3 та видаляємо вершину x_1 . Отримаємо чергу $[x_2, x_3]$. Порядок обходу – x_1, x_2, x_3 .
- Розглядаємо вершину x_2 . Суміжні до неї вершини x_1, x_3, x_7, x_8 . Оскільки вершини x_1, x_3 вже відвідали, то до черги додаємо лише вершини x_7, x_8 та видаляємо вершину x_2 . Отримаємо чергу $[x_3, x_7, x_8]$. Порядок обходу – x_1, x_2, x_3, x_7, x_8 .
- Розглядаємо вершину x_3 . Суміжні до неї вершини x_1, x_2, x_4, x_5 , з яких x_1 та x_2 вже відвідані. До черги додаємо вершини x_4, x_5 . Видаляємо вершину x_3 . Отримаємо чергу $[x_7, x_8, x_4, x_5]$. Порядок обходу – $x_1, x_2, x_3, x_7, x_8, x_4, x_5$.

- Аналогічно для вершини x_7 отримаємо чергу $[x_8, x_4, x_5, x_6, x_9]$. Порядок обходу – $x_1, x_2, x_3, x_7, x_8, x_4, x_5, x_6, x_9$.

Відвідали всі вершини, обхід завершено.

g) У ході реалізації алгоритму обходу в глибину (DFS-обхід) використовується структура даних стек, який працює за принципом «останній прийшов – перший вийшов» (Last In, First Out – LIFO). Нові вершини додаються у верхівку стеку, а знімаються з неї в зворотному порядку. На відміну від обходу в ширину, при обході в глибину спочатку досліджується найдаальший ще не відвіданий вузол. Якщо у поточної вершини є не відвідані сусіди, обирається один із них (як правило, з найменшим номером), і алгоритм переходить до нього, заносючи вершину у стек. Якщо ж усі сусіди вже відвідані – відбувається повернення назад. Таким чином, проходить поглиблене дослідження гілки графа до кінця, а потім повернення й перехід до іншої гілки. Уся процедура наведена нижче.

- Обхід графа в глибину почнемо з вершини x_1 , яку додаємо в стек $[x_1]$.
- Суміжні до x_1 вершини x_2, x_3 . Додаємо в стек x_2 та видаляємо вершину x_1 . Отримаємо стек $[x_2]$. Порядок обходу – x_1, x_2 .
- Суміжні до x_2 вершини x_1, x_3, x_7, x_8 . Вершину x_1 вже відвідали, тому в стек додаємо x_3 та видаляємо вершину x_2 . Отримаємо стек $[x_3]$. Порядок обходу – x_1, x_2, x_3 .
- Продовжимо аналогічно додавати вершини аж до x_8 . Отримаємо стек $[x_8]$. Порядок обходу – $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$.
- Розглядаємо вершину x_8 . Суміжні до неї вершини x_2, x_5, x_6, x_7 вже відвідано, тому повертаємось до попередньої вершини x_7 .
- Суміжні до x_7 вершини x_2, x_6, x_8, x_9 , з них не відвідана вершина x_9 . Додаємо її. На цьому обхід завершено, оскільки відвідали всі вершини.

Остаточний порядок DFS-обходу – $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ № 8

Завдання I

Виконати операції над множинами, заданими в таблиці

- a) $(A \setminus B) \cap \bar{C}$;
- b) $A \cup (B \setminus C)$;
- c) $(A \cup B) \cap (C \setminus B)$;
- d) $\overline{(A \setminus B) \cup (B \setminus C)}$;
- e) $(C \div A) \cup (B \setminus A)$.

№ вар.	A	B	C
1	{2, 4, 5, 7, 9, 12}	{4, 7, 5, 8}	{5, 8, 11}
2	{1, 3, 6, 8, 10, 13}	{3, 6, 8, 9}	{6, 9, 12}
3	{2, 4, 7, 8, 10, 11}	{4, 7, 8, 9}	{7, 9, 12}
4	{1, 4, 5, 7, 9, 14}	{4, 7, 5, 10}	{7, 10, 12}
5	{2, 3, 6, 8, 9, 13}	{3, 6, 8, 11}	{6, 11, 12}
6	{1, 4, 5, 8, 10, 14}	{4, 8, 5, 9}	{8, 9, 12}
7	{2, 4, 6, 7, 9, 13}	{4, 6, 7, 10}	{6, 10, 11}
8	{1, 3, 5, 7, 10, 12}	{3, 7, 5, 8}	{3, 8, 11}
9	{2, 4, 6, 7, 9, 14}	{4, 6, 7, 8}	{4, 8, 12}
10	{1, 4, 5, 7, 9, 13}	{4, 7, 5, 10}	{9, 10, 11}
11	{2, 3, 6, 8, 10, 14}	{3, 8, 6, 9}	{8, 9, 12}
12	{1, 4, 5, 6, 10, 13}	{4, 6, 5, 7}	{10, 7, 12}
13	{2, 3, 6, 7, 9, 14}	{3, 7, 6, 8}	{7, 8, 11}
14	{1, 4, 5, 6, 9, 12}	{4, 6, 5, 8}	{12, 8, 11}
15	{2, 3, 6, 8, 10, 13}	{3, 8, 6, 7}	{13, 7, 12}
16	{1, 4, 5, 7, 9, 14}	{4, 7, 5, 8}	{14, 8, 11}
17	{2, 3, 6, 8, 10, 14}	{3, 6, 8, 9}	{2, 9, 12}
18	{1, 4, 5, 8, 9, 12}	{4, 8, 5, 7}	{1, 7, 11}
19	{2, 3, 6, 7, 10, 14}	{3, 7, 6, 8}	{10, 8, 12}
20	{1, 4, 5, 6, 9, 13}	{4, 6, 5, 10}	{1, 10, 11}
21	{2, 3, 6, 7, 9, 13}	{3, 7, 6, 8}	{2, 8, 12}
22	{1, 4, 5, 8, 10, 14}	{4, 8, 5, 7}	{10, 7, 12}
23	{2, 3, 6, 7, 9, 14}	{3, 6, 7, 8}	{9, 8, 11}
24	{1, 4, 5, 7, 10, 13}	{4, 7, 5, 9}	{1, 9, 12}

25	{2, 3, 6, 8, 10, 14}	{3, 8, 6, 7}	{2, 7, 11}
26	{1, 4, 5, 6, 9, 12}	{4, 6, 5, 8}	{9, 8, 11}
27	{2, 3, 6, 7, 9, 13}	{3, 7, 6, 8}	{6, 8, 12}
28	{1, 4, 5, 8, 10, 13}	{4, 8, 5, 7}	{1, 7, 11}
29	{2, 3, 6, 8, 10, 14}	{3, 6, 8, 7}	{14, 7, 12}
30	{1, 4, 5, 7, 9, 14}	{4, 7, 5, 8}	{9, 8, 11}

Завдання II

Спростити вираз

- $\overline{(A \cap B) \cup \bar{A} \cup (\bar{B} \cap A)}$;
- $\overline{(\bar{A} \cup \bar{B}) \cap (A \cap B) \cup (\bar{A} \cup B)}$;
- $\overline{\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{A} \cap A \cup \bar{B}}$;
- $\overline{A \cup B \cup \bar{A} \cup (A \cap \bar{B})}$;
- $\overline{(\bar{A} \cap \bar{B}) \cup \bar{B} \cup \bar{A} \cup \bar{A}}$;
- $\overline{(\bar{A} \cap \bar{B}) \cup \bar{A} \cap \bar{B} \cup (\bar{A} \cap \bar{B})}$;
- $\overline{\bar{A} \cup \bar{B} \cup (\bar{B} \cap A) \cup \bar{A}}$;
- $\overline{\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{A} \cup \bar{B}}$;
- $\overline{(A \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) \cup (A \cap \bar{B})}$;
- $\overline{(\bar{A} \cap \bar{B}) \cup \bar{B} \cap \bar{A} \cup B}$;
- $A \cap \bar{B} \cup A \cup B \cup \bar{A} \cup \bar{B}$;
- $\overline{(A \cup B) \cap A \cup \bar{B} \cup \bar{A}}$;
- $\overline{\bar{A} \cap \bar{B} \cup \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{A} \cap B}$;
- $\bar{B} \cup (A \cap B) \cup \bar{B} \cup \bar{A} \cap A$;
- $A \cup \bar{A} \cup B \cup \bar{B} \cup \bar{A} \cap B$;
- $\overline{(\bar{A} \cap \bar{B}) \cup \bar{A} \cup (\bar{B} \cap A)}$;
- $\overline{(\bar{A} \cup \bar{B}) \cap (A \cap B) \cup (\bar{A} \cup B)}$;
- $\overline{\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{A} \cap A \cup \bar{B}}$;

19. $\overline{A \cup B \cup \bar{A} \cup (A \cap \bar{B})}$;
20. $\overline{(\bar{A} \cap \bar{B}) \cup \bar{B} \cup \bar{A} \cup \bar{A}}$;
21. $\overline{(\bar{A} \cap \bar{B}) \cup \bar{A} \cap \bar{B} \cup (\bar{A} \cap \bar{B})}$;
22. $\overline{\bar{A} \cup \bar{B} \cup (\bar{B} \cap A) \cup \bar{A}}$;
23. $\overline{\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{A} \cup \bar{B}}$;
24. $\overline{(A \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) \cup (A \cap \bar{B})}$;
25. $\overline{(\bar{A} \cap \bar{B}) \cup \bar{B} \cap \bar{A} \cup \bar{B}}$;
26. $A \cap \bar{B} \cup A \cup B \cup \bar{A} \cup \bar{B}$;
27. $\overline{(A \cup B) \cap \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{A}}$;
28. $\overline{\bar{A} \cap \bar{B} \cup \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{A} \cap B}$;
29. $\bar{B} \cup (A \cap B) \cup \bar{B} \cup \bar{A} \cap A$;
30. $A \cup \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{B} \cup A \cap B$.

Завдання III

Визначити, чи являється наступна формула тавтологією?

1. $x \wedge \bar{y} \vee (y \rightarrow (z \vee \bar{x})) \sim (\bar{x} \vee \bar{y}) \vee (y \rightarrow (z \vee \bar{x}))$
2. $(x \vee y) \wedge (y \rightarrow z) \rightarrow (x \vee z) \sim (x \vee y)$
3. $(x \sim y) \wedge (y \sim z) \rightarrow (x \sim z) \sim \bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}$
4. $((x \wedge \bar{y}) \vee (y \wedge \bar{z})) \rightarrow ((x \vee z) \sim \bar{y})$
5. $\overline{(x \vee y) \wedge \bar{z}} \sim (\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee z \sim x \rightarrow z$
6. $(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z) \sim \bar{y} \wedge \bar{z}$
7. $(x \vee \bar{y}) \wedge (y \vee \bar{z}) \rightarrow (x \vee \bar{z}) \sim \bar{y} \wedge \bar{z}$
8. $(x \sim y) \vee (y \sim z) \rightarrow (x \sim z) \sim \bar{x} \vee y \vee z$
9. $(x \vee y) \sim \bar{x} \wedge \bar{y} \sim (y \vee z) \rightarrow z$
10. $(\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{y} \vee z) \sim (\bar{x} \vee z) \rightarrow x$
11. $\overline{(x \wedge y) \vee \bar{z}} \sim (\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge z \sim y \rightarrow z$
12. $((x \wedge y) \rightarrow z) \sim ((x \rightarrow z) \vee (y \rightarrow z)) \sim x \vee y$

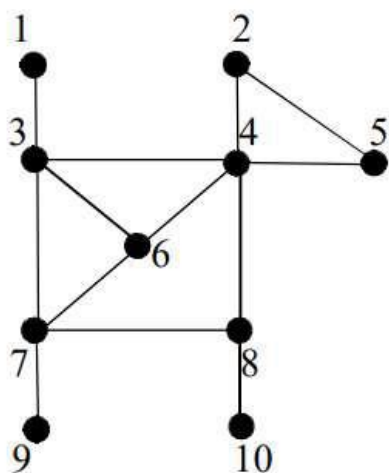
13. $(x \rightarrow (y \vee z)) \sim ((x \rightarrow y) \vee (x \rightarrow z)) \sim \overline{y \wedge z}$
14. $(\bar{x} \vee y) \wedge (x \vee \bar{z}) \sim (\bar{y} \vee z) \rightarrow y \sim \bar{x}$
15. $((x \sim y) \wedge (y \sim z)) \sim (x \sim z) \sim \overline{\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}}$
16. $x \wedge \bar{y} \vee (y \rightarrow (z \vee \bar{x})) \sim (\bar{x} \vee \bar{y}) \vee (y \rightarrow (z \vee \bar{x}))$
17. $(x \vee y) \wedge (y \rightarrow z) \rightarrow (x \vee z) \sim (x \vee y)$
18. $(x \sim y) \wedge (y \sim z) \rightarrow (x \sim z) \sim \overline{\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}}$
19. $((x \wedge \bar{y}) \vee (y \wedge \bar{z})) \rightarrow ((x \vee z) \sim \bar{y})$
20. $\overline{(x \vee y) \wedge \bar{z}} \sim (\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee z \sim x \rightarrow z$
21. $(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z) \sim \overline{y \wedge \bar{z}}$
22. $(x \vee \bar{y}) \wedge (y \vee \bar{z}) \rightarrow (x \vee \bar{z}) \sim \overline{y \wedge \bar{z}}$
23. $(x \sim y) \vee (y \sim z) \rightarrow (x \sim z) \sim \bar{x} \vee y \vee z$
24. $(x \vee y) \sim \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}} \sim (y \vee z) \rightarrow z$
25. $(\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{y} \vee z) \sim (\bar{x} \vee z) \rightarrow x$
26. $\overline{(x \wedge y) \vee \bar{z}} \sim (\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge z \sim y \rightarrow z$
27. $((x \wedge y) \rightarrow z) \sim ((x \rightarrow z) \vee (y \rightarrow z)) \sim x \vee y$
28. $(x \rightarrow (y \vee z)) \sim ((x \rightarrow y) \vee (x \rightarrow z)) \sim \overline{y \wedge \bar{z}}$
29. $(\bar{x} \vee y) \wedge (x \vee \bar{z}) \sim (\bar{y} \vee z) \rightarrow y \sim \bar{x}$
30. $((x \sim y) \wedge (y \sim z)) \sim (x \sim z) \sim \overline{\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}}$

Завдання IV

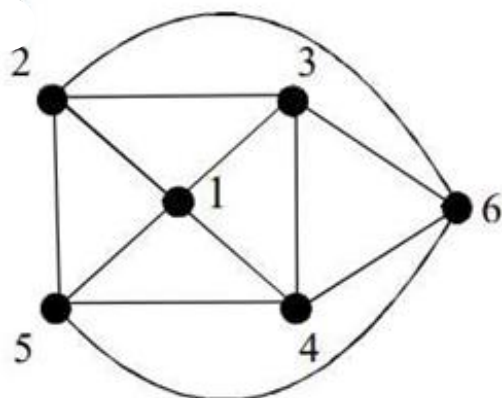
Відповідно до варіанту:

- a) записати матрицю суміжності графа;
- b) записати матрицю інцидентності;
- c) представити граф списками суміжності;
- d) визначити ступінь всіх вершин графа;
- e) визначити ексцентриситет вершини x_1 графа;
- f) обійти граф за алгоритмом пошуку в ширину;
- g) обійти граф за алгоритмом пошуку в глибину.

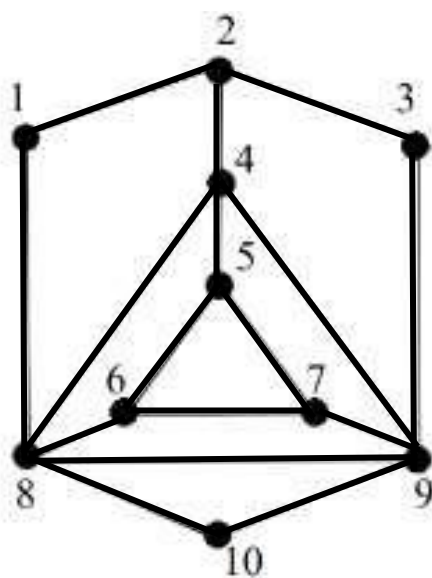
Варіант 1



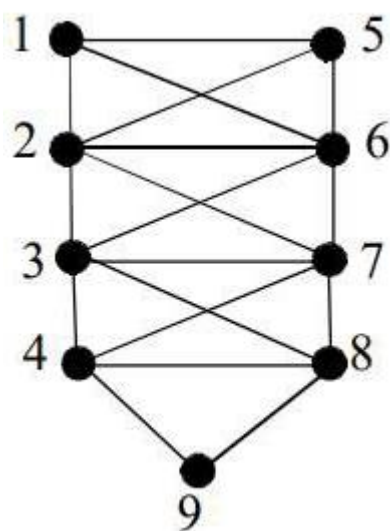
Варіант2



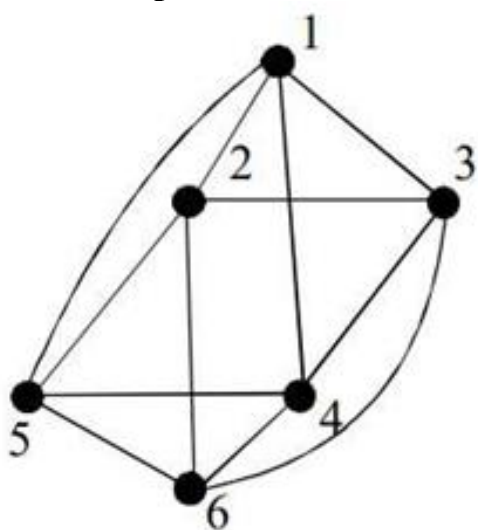
Варіант 3



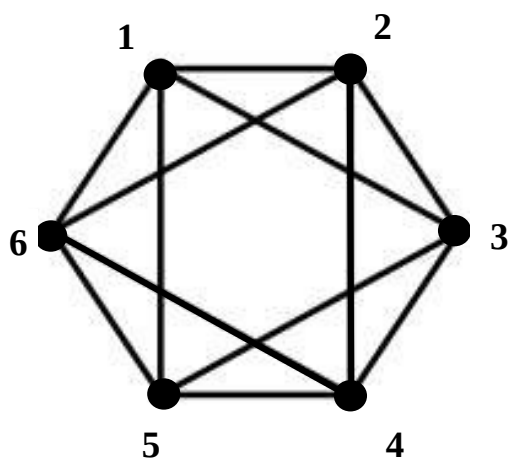
Варіант 4



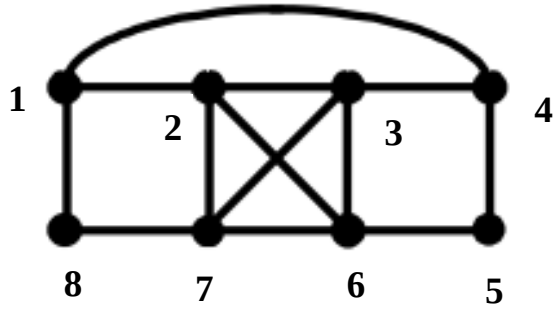
Варіант 5



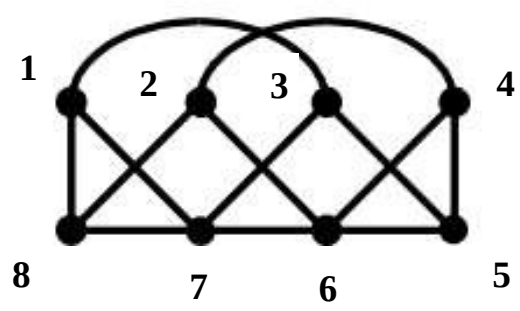
Варіант 6



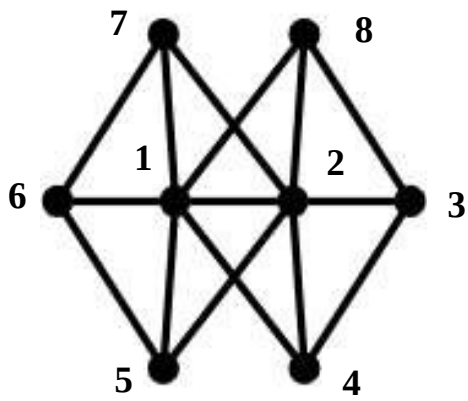
Варіант 7



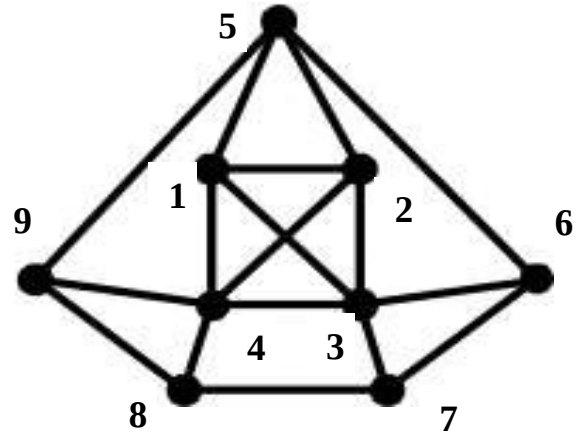
Варіант 8



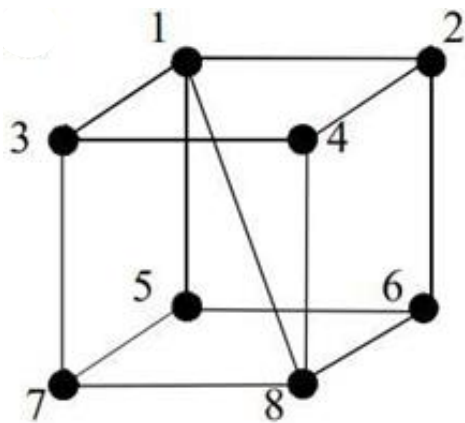
Варіант 9



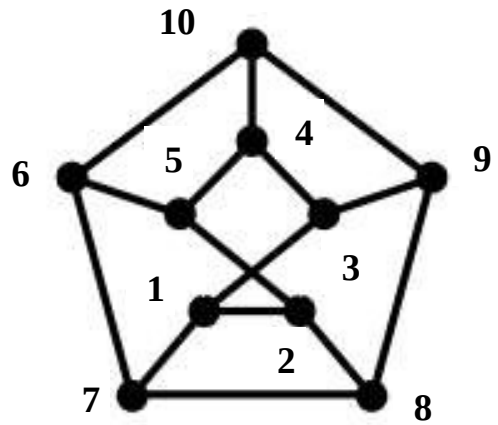
Варіант 10



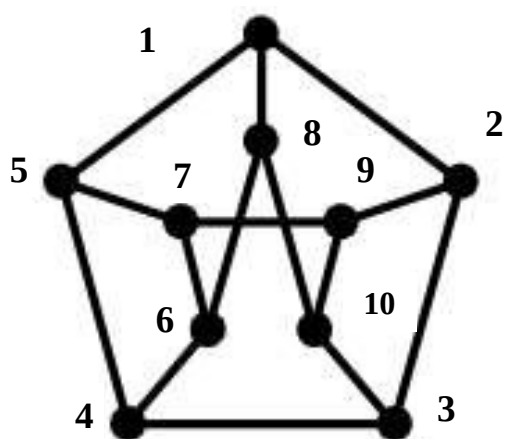
Варіант 11



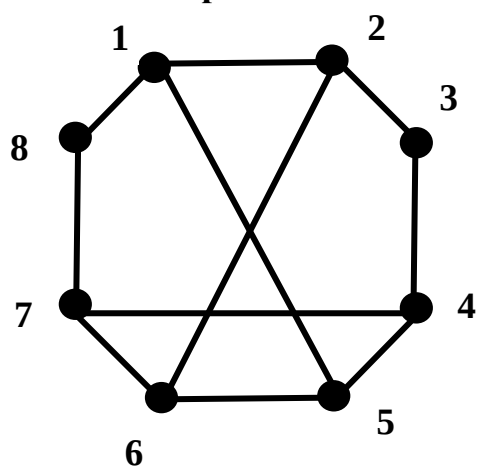
Варіант 12



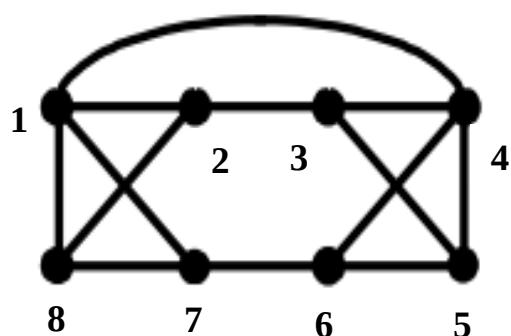
Варіант 13



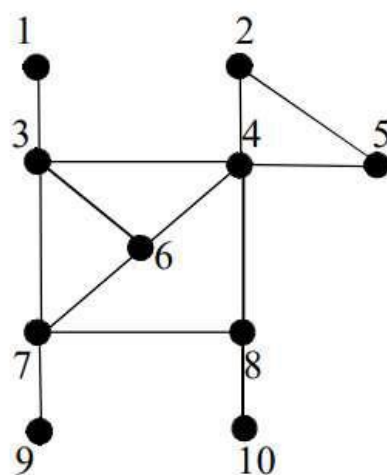
Варіант 14



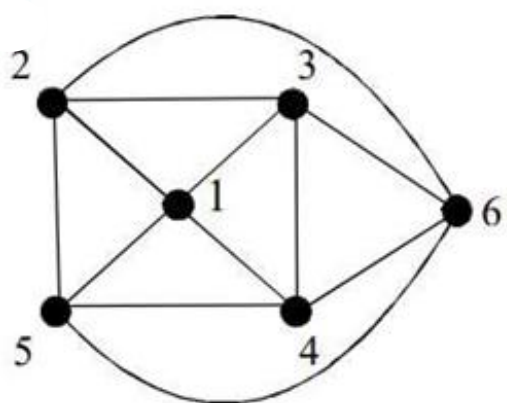
Варіант 15



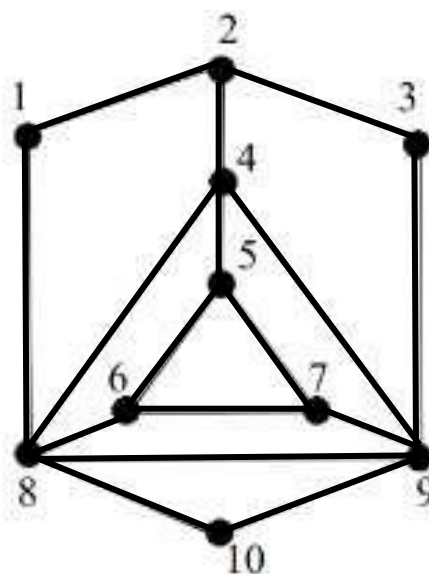
Варіант 16



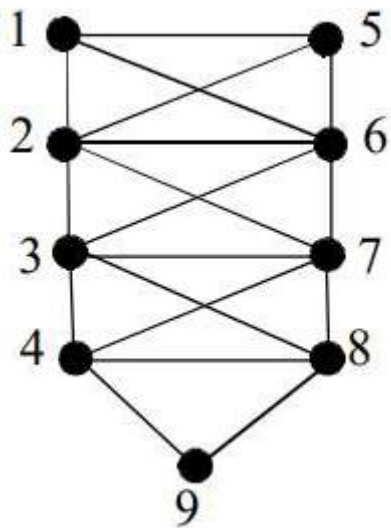
Варіант 17



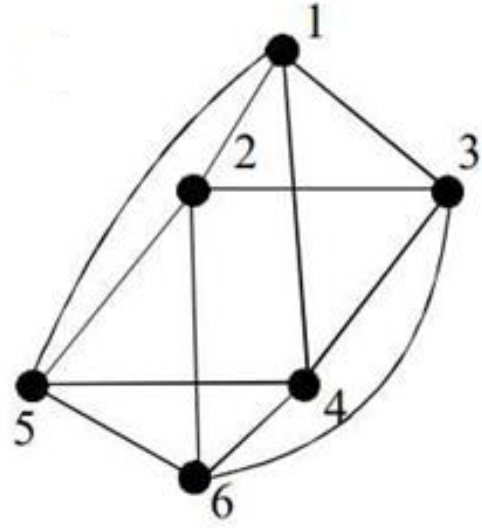
Варіант 18



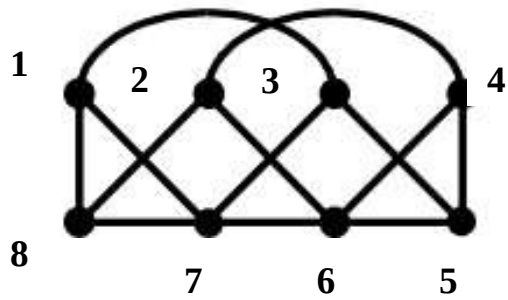
Варіант 19



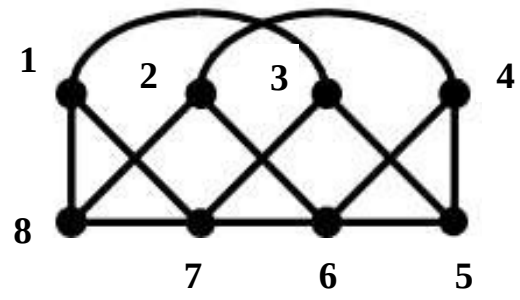
Варіант 20



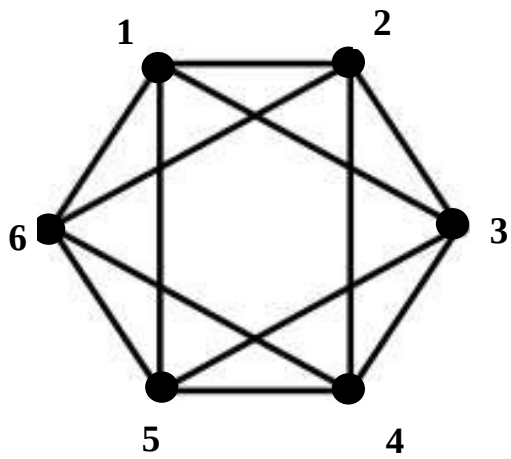
Варіант 21



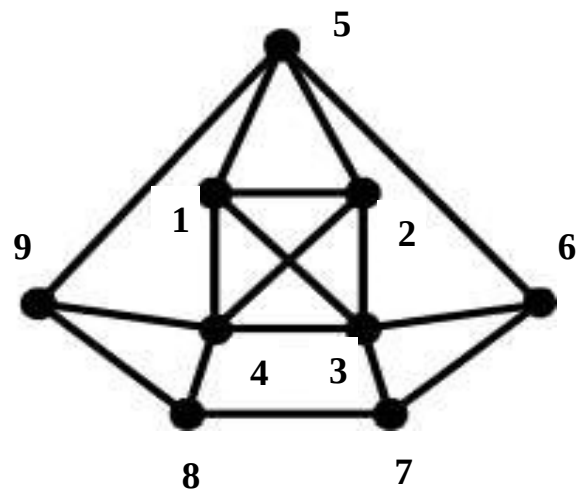
Варіант 22



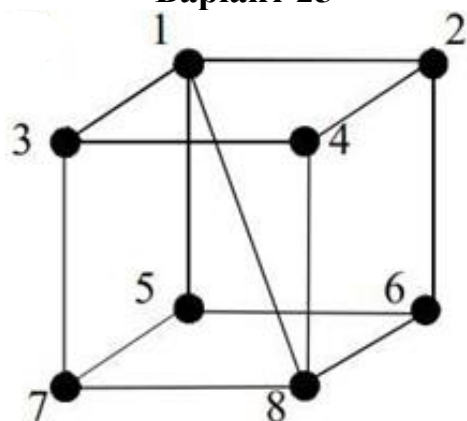
Варіант 23



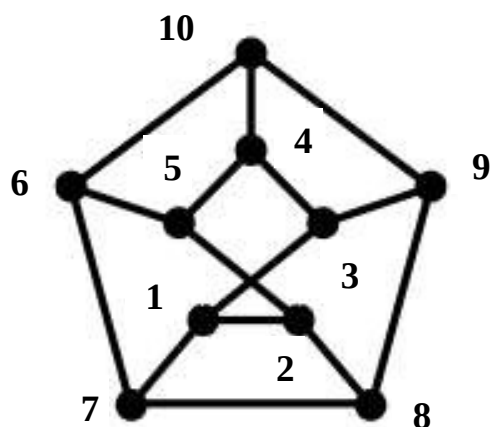
Варіант 24



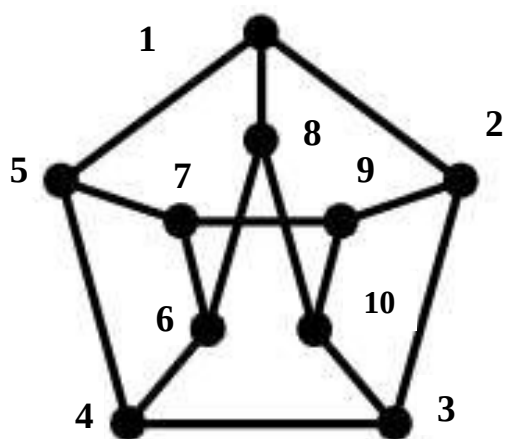
Варіант 25



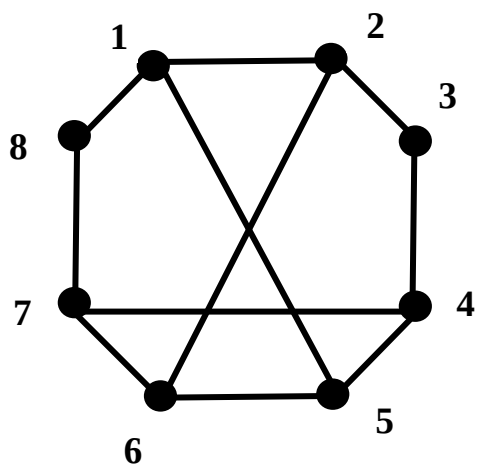
Варіант 26



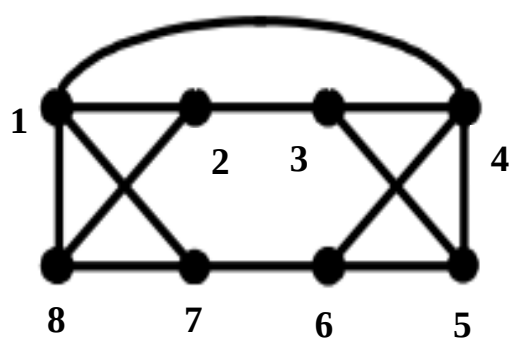
Варіант 27



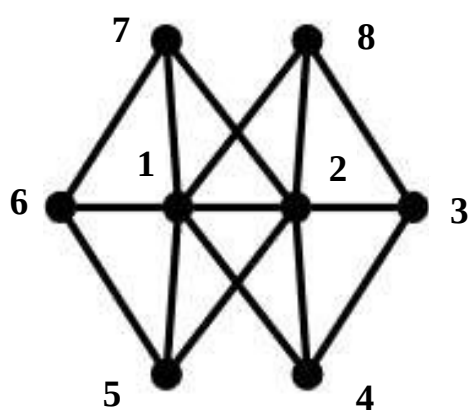
Варіант 28



Варіант 29



Варіант 30



ПЕРЕЛІК ПИТАНЬ ДО ЗАЛІКУ

1. Визначення матриці. Види матриць.
2. Операції над матрицями. Властивості матричних операцій.
3. Транспонування матриці. Умови існування та властивості оберненої матриці
4. Методи обчислення оберненої матриці.
5. Визначники. Обчислення визначників другого та третього порядку.
6. Властивості визначників та їх обчислення.
7. Мінори та алгебраїчні доповнення.
8. Метод Крамера розв'язання систем лінійних рівнянь.
9. Метод Гауса розв'язання систем лінійних рівнянь.
10. Матричний метод розв'язання систем лінійних рівнянь.
11. Визначення та обчислення рангу матриці.
12. Основні поняття: вектор, колінеарність, компланарність.
13. Додавання та множення векторів.
14. Скалярний добуток. Геометричний зміст.
15. Векторний добуток. Геометричний зміст.
16. Мішаний добуток. Об'єм паралелепіпеда.
17. Базис і розмірність лінійного простору.
18. Координати вектора у заданому базисі.
19. Дослідження лінійної залежності.
20. Рівняння прямої на площині.
21. Взаємне розташування прямих на площині.
22. Рівняння прямої у просторі.
23. Рівняння площини.
24. Відстань від точки до прямої/площини.
25. Криві другого порядку.
26. Поняття функціональної залежності.
27. Основні види функцій. Властивості функцій.

28. Алгебраїчна форма комплексного числа.
29. Геометрична інтерпретація комплексного числа.
30. Тригонометрична та показникова форми запису.
31. Дії над комплексними числами.
32. Модуль і аргумент комплексного числа.
33. Числова послідовність.
34. Обмежені та монотонні послідовності.
35. Границя послідовності.
36. Границя функції.
37. Властивості границь.
38. Перша чудова границя.
39. Друга чудова границя.
40. Нескінченно малі та нескінченно великі величини.
41. Правило Лопіталя.
42. Неперервність функцій.
43. Основні теореми про неперервність функції.
44. Класифікація розривів функцій.
45. Похідна функції.
46. Геометрична та механічна інтерпретація похідної.
47. Обчислення похідної.
48. Диференціал.
49. Похідні та диференціали вищих порядків.
50. Дослідження функцій та побудова їх графіків.
51. Функції однієї змінної. Основні елементарні функції та їх графіки.
52. Рівняння дотичної до графіка функції в заданій точці.
53. Асимптоти функції: горизонтальні, вертикальні та похилі.
54. Графіки функцій двох змінних.
55. Локальні екстремуми.
56. Частинні похідні.
57. Повний диференціал.

- 58. Наближене обчислення функції за допомогою диференціала.
- 59. Метод найменших квадратів.
- 60. Функції кількох змінних.

ПЕРЕЛІК ПИТАНЬ ДО ЕКЗАМЕНУ

1. Поняття первісної та невизначеного інтеграла.
2. Невизначений інтеграл та його властивості.
3. Метод безпосереднього інтегрування.
4. Метод заміни змінної.
5. Метод інтегрування частинами для невизначеного інтеграла.
6. Інтегрування раціональних дробів.
7. Інтегрування тригонометричних функцій.
8. Інтегрування ірраціональних функцій.
9. Визначений інтеграл та його властивості.
10. Обчислення визначеного інтеграла.
11. Теорема Ньютона-Лейбніца.
12. Метод заміни змінної у визначеному інтегралі.
13. Метод інтегрування частинами для визначеного інтеграла.
14. Обчислення площ плоских фігур за допомогою визначеного інтеграла.
15. Обчислення об'ємів тіл обертання за допомогою визначеного інтеграла.
16. Застосування визначеного інтеграла.
17. Диференціальні рівняння 1-го порядку, їх класифікація.
18. Диференціальні рівняння з відокремленими та відокремлювальними змінними.
19. Однорідні диференціальні рівняння 1-го порядку.
20. Лінійні диференціальні рівняння 1-го порядку. Метод Бернуллі.
21. Рівняння у повних диференціалах.
22. Задачі, що приводять до звичайних диференціальних рівнянь.
23. Метод Лагранжа (варіації довільних сталих).
24. Теорема існування та єдиності розв'язку задачі Коші.
25. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку, їх класифікація.
26. Диференціальні рівняння другого порядку, які допускають зниження порядку.

27. Загальний та частинний розв'язки лінійного однорідного рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.
28. Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.
29. Однорідні диференціальні лінійні рівняння другого порядку
30. Диференціальні лінійні рівняння другого порядку зі спеціальною правою частиною.
31. Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків зі сталими коефіцієнтами.
32. Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків, які допускають пониження порядку.
33. Означення числового ряду, n -ї часткової суми, збіжного та розбіжного числового ряду.
34. Умови збіжності, гармонійний ряд.
35. Геометричний ряд.
36. Властивості збіжних числових рядів.
37. Достатні ознаки збіжності числових рядів з додатними членами: ознака порівняння, ознака Д'аламбера, радикальна та інтегральна ознаки Коші.
38. Знакозмінні ряди: означення, достатня ознака збіжності.
39. Абсолютна та умовна збіжність.
40. Знакопочергові ряди: означення, ознака Лейбніца.
41. Поняття про функціональні ряди та їх збіжність.
42. Степеневі ряди та область збіжності.
43. Застосування рядів для наближених обчислень
44. Означення множини, операції над множинами.
45. Основні методи представлення множин.
46. Діаграми Венна та круги Ейлера.
47. Декартів добуток. Впорядковані пари.

48. Бінарні відношення. Властивості.
49. Основи булевої алгебри. Основні булеві операції.
50. Таблиця істинності. Навести приклади таблиць істинності для двох змінних для операцій кон'юнкції, диз'юнкції, заперечення, еквівалентності та імплікації.
51. Закони де Моргана. Їх застосування у спрощенні булевих функцій.
52. Закон ідемпотентності та закон поглинання в булевій алгебрі
53. Основні поняття логіки висловлювань. Логічні операції над висловлюваннями. Різниця між простими та складними висловлюваннями.
54. Теорія графів. Основні поняття.
55. Орієнтовані та неорієнтовані графи.
56. Основні операції над графами.
57. Маршрути, ланцюги, цикли.
58. Ейлерові та Гамільтонові графи.
59. Дерева. Властивості дерев.
60. Пошук у графах: BFS, DFS.

ДОДАТКИ

Додаток 1. Властивості логарифмів

1. Основна логарифмічна тотожність

$$a^{\log_a b} = b.$$

2. Логарифм основи дорівнює одиниці

$$\log_a a = 1.$$

3. Логарифм одиниці дорівнює нулю

$$\log_a 1 = 0.$$

4. Формула для логарифма добутку

$$\log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a |x_1| + \log_a |x_2|.$$

5. Формула для логарифма частки

$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a |x_1| - \log_a |x_2|.$$

6. Формула для логарифма степеню

$$\log_a x^n = n \log_a x.$$

7. $\log_{a^k} x = \frac{1}{k} \log_a x.$

8. $\log_{a^k} x^n = \frac{n}{k} \log_a x.$

9. $a^{\log_m b} = b^{\log_m a}.$

10. Формула переходу до нової основи

$$\log_a N = \frac{\log_c N}{\log_c a}.$$

Зокрема,

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

Додаток 2. Основні тригонометричні формули

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} & \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \\ \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha &= 1 & \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \\ 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha &= \frac{1}{\cos^2 \alpha} & 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha &= \frac{1}{\sin^2 \alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha \mp \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \pm \sin \alpha \sin \beta \\ \operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) &= \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} \\ \operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) &= \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta \mp 1}{\operatorname{ctg} \beta \pm \operatorname{ctg} \alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \\ \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} \\ \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} &= \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \\ &= 1 - 2 \sin^2 \alpha \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \\ \operatorname{ctg} 2\alpha &= \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{2tg \frac{\alpha}{2}}{1 + tg^2 \frac{\alpha}{2}} & \cos \alpha &= \frac{1 - tg^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + tg^2 \frac{\alpha}{2}} \\ tg \alpha &= \frac{2tg \frac{\alpha}{2}}{1 - tg^2 \frac{\alpha}{2}} & ctg \alpha &= \frac{1 - tg^2 \frac{\alpha}{2}}{2tg \frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \sin \alpha \cos \beta &= \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \\ 2 \cos \alpha \cos \beta &= \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \\ 2 \sin \alpha \sin \beta &= \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \\ \cos \alpha - \cos \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} tg \alpha - tg \beta &= \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} \\ tg \alpha + tg \beta &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} \\ ctg \alpha - ctg \beta &= \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta} \\ ctg \alpha + ctg \beta &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 + \cos \alpha &= 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \\ 1 - \cos \alpha &= 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 3 \alpha &= 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \\ \cos 3 \alpha &= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \end{aligned}$$

Таблиця значень тригонометричних функцій

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	—

Формули зведення

Назва функції не змінюється				Назва функції змінюється на схожу			
	$-\alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$
$\sin$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$
$\cos$	$\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$
tg	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$
$\alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n + 1), n \in Z$				$\alpha \neq \pi n, n \in Z$			
ctg	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
$\alpha \neq \pi n, n \in Z$				$\alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n + 1), n \in Z$			

Додаток 3. Дії з комплексними числами

Нехай $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$, де $i^2 = -1$ – уявна одиниця.

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i;$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i;$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)i;$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i) \cdot (a_2 - b_2 i)} = \frac{a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2}{a_2^2 + b_2^2} - \frac{a_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot a_2}{a_2^2 + b_2^2} i$$

$$\sqrt{z_1} = \begin{cases} \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \right), & \text{якщо } b > 0; \\ \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} - i \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \right), & \text{якщо } b < 0. \end{cases}$$

Тригонометрична форма комплексного числа: $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, де

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{r}, \quad \cos \varphi = \frac{a}{r}.$$

Нехай $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Формула Муавра: $z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Формула Ейлера: $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$, $e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi$,

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Показникова форма комплексного числа: $z = r \cdot e^{i\varphi}$.

Додаток 4. Таблиця похідних

1.	$y = c \quad (c - \text{const})$	$y' = 0$
2.	$y = x$	$y' = 1$
3.	$y = u^n$	$y' = nu^{n-1} \cdot u'$
4.	$y = \sqrt{u}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
5.	$y = a^u \quad (a > 0, \ a \neq 1)$	$y' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
6.	$y = e^u$	$y' = e^u u'$
7.	$y = \log_a u$	$y' = \frac{u'}{u \ln a}$
8.	$y = \ln u$	$y' = \frac{1}{u} u'$
9.	$y = \sin u$	$y' = \cos u \cdot u'$
10.	$y = \cos u$	$y' = -\sin u \cdot u'$
11.	$y = \operatorname{tgu}$	$y' = \frac{1}{\cos^2 u} u'$
12.	$y = \operatorname{ctgu}$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 u} u'$
13.	$y = \arcsin u$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u'$
14.	$y = \arccos u$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u'$
15.	$y = \operatorname{arctgu}$	$y' = \frac{1}{1+u^2} u'$
16.	$y = \operatorname{arcctgu}$	$y' = -\frac{1}{1+u^2} u'$

Правила диференціювання

$$y = c_1 u \pm c_2 v$$

$$y = u \cdot v$$

$$y = \frac{u}{v}$$

$$y = (f(u))$$

$$y' = c_1 u' \pm c_2 v'$$

$$y' = u'v + uv'$$

$$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$y' = f'_u \cdot U'_x$$

Додаток 5. Таблиця інтегралів

$$1. \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1;$$

$$2. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$$

$$3. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$$

$$4. \int e^x dx = e^x + C;$$

$$5. \int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$6. \int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$7. \int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C;$$

$$8. \int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C;$$

$$9. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$$

$$10. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$$

$$11. \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C;$$

$$12. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C = -\operatorname{arccos} \frac{x}{a} + C;$$

$$13. \int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C - \text{формула високого логарифма};$$

$$14. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C - \text{формула довгого логарифма};$$

$$15. \int \frac{x dx}{x^2 \pm a^2} = \frac{1}{2} \ln|x^2 \pm a^2| + C.$$

Додаток 6. Розвинення елементарних функцій в ряди

1. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (-\infty < x < \infty);$

2. $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \quad (-\infty < x < \infty);$

3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (-\infty < x < \infty);$

4. $(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots$
 $(-1 < x < 1);$

5. $\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots;$

6. $\ln x = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad (-1 < x \leq 1).$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Скляренко О. В., Терещук Г.М. Практикум з вищої математики: Навчальний посібник.(3-є вид. оновл. і доп.) –К: Видавництво Європейського університету, 2023. – 155 с.
2. Дубчак В. М. Вища математика в прикладах та задачах. Навчальний посібник / В.М.Дубчак, В.М.Пришляк, Л.І.Новицька. – Вінниця: ВНАУ, 2018. – 254 с
3. Харченко А.П. Вища математика в прикладах і задачах, частина І: Навчальний посібник / А.П.Харченко, В.О.Гаєвська, Г.В.Лисянська. – Х:НТМТ, 2017. – 194 с
4. Харченко А.П. Вища математика в прикладах і задачах, частина ІІ: Навчальний посібник / А.П.Харченко, В.О.Гаєвська, Г.В.Лисянська. – Х:НТМТ, 2017. – 233 с
5. Вища математика: базовий підручник для вузів / В.С.Пономаренка. – Х.: Фоліо, 2017. – 669 с
6. Герасимчук В. С. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах / В.С.Герасимчук, Г.С.Васильченко, В.І.Кравцов. – К.: Книги України ЛТД, 2018. – 470 с
7. Практикум з вищої математики: Навчальний посібник / За ред. В.О.Ковалю. – Ж: ЖДТУ, 2018. – 448 с
8. Вища математика. Загальний курс: Збірник задач та вправ. / А.Д.Тевяшев, О.Г.Литвин. URL: <https://www.twirpx.com/file/277182/> (дата звернення 12.05.2021)
9. Вища математика. Збірник задач: Навчальний посібник / В.П.Дубовик. URL: https://issuu.com/erudytnet/docs/1dubovik_v_p_yurik_i_i_vishcha_mate (дата звернення 12.05.2021)
10. Маловічко Т. В. Математичний аналіз. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Конспект лекцій [Електронний ресурс] : навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальністю 104 Фізика та астрономія / Т. В. Маловічко ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. –

- Електронні текстові дані (1 файл: 2,67 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2025. – 151 с.
- 11.Інтегральне числення функцій однієї змінної. Конспект лекцій (Електронний ресурс) : навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра технічних спеціальностей / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: І. В. Алексєєва, Н. Р. Коновалова. – Електронні текстові дані (1 файл: 29,32 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024. – 297 с
- 12.Дем'яненко, О. О. Диференціальні рівняння та системи. Навчальний посібник (конспект лекцій) [Електронний ресурс] : навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою «Комп'ютерні технології в біології та медицині» спеціальності 122 Комп'ютерні науки та інформаційні технології /Дем'яненко О. О., Репета Л. А. ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 9,9 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024. – 79 с.
- 13.Дем'яненко, О. О. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Конспект лекцій. Практикум [Електронний ресурс] : навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою «Комп'ютерні технології в біології та медицині» спеціальності 122 Комп'ютерні науки та інформаційні технології / О. О. Дем'яненко, Л. А. Репета ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 23,83 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. – 160 с.
- 14.Бакун, В. В. Математичний аналіз. Частина III. Числові й функціональні ряди. Інтеграли, залежні від параметра [Електронний ресурс] : підручник у 3-х ч. / В. В. Бакун ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 3,23 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 435 с.
- 15.Вища математика. Частина 1. Лінійна, векторна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення. Курс лекцій [Електронний ресурс] : навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за спец. 186 «Видавництво та поліграфія», 133 «Галузеве машинобудування» / КПІ ім. Ігоря

Сікорського ; уклад.: О. І. Кушлик-Дивульська, Т. В. Авдєєва. –Електрон. текст. дані (1 файл: 5,41 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2025. – 269 с

16. Pogorelov S. Mathematics and statistics : the textbook for applicants for higher education / S. Pogorelov, I. Krasovskyi, F. Dyagileva. — Kharkiv : NUPh : Golden Pages, 2019. — 224 p. ISBN 978-966-615-553-8
17. Свєрдан П.Л. Вища математика. Математичний аналіз і теорія ймовірностей: Підручник. –К: Знання, 2018. – 450 с.

Навчальне видання

Олена Вікторівна Скляренко

Ганна Михайлівна Терещук

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Навчальний посібник
для студентів ІТ-спеціальностей
закладів вищої освіти